

Toán cao cấp - Thầy Nguyễn Thanh Vân

Lữ Phúc

Ngày 17 tháng 5 năm 2025

Mục lục

1	BÀI TẬP CHƯƠNG 1	2
2	BÀI TẬP CHƯƠNG 2	7
3	BÀI TẬP CHƯƠNG 3	15
	A Đề bài	15
	B Lời giải	17
4	BÀI TẬP CHƯƠNG 4	26
5	BÀI TẬP CHƯƠNG 6	40

1 BÀI TẬP CHƯƠNG 1

✍ **Câu 1.** Cho $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$. $A^2 A^T$ không khả đảo khi và chỉ khi nào ?

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Ma trận A được gọi là khả nghịch (không suy biến, khả đảo) khi $\det(A) \neq 0$
- ☑ $\det(A) = \det(A^T)$
- ☑ $\det(AB) = \det(A)\det(B) \rightarrow \det(A^n) = \det(A)^n$

Do $A^2 A^T$ không khả đảo nên $\det(A^2 A^T) = 0$ mà ta có

$$\det(A^2 A^T) = \det(A^2)\det(A^T) = \det(A^3) = \det(A)^3,$$

nên $\det(A) = 0$. Mà ta dễ tính được $\det(A) = 3m - m^3 - 2$, suy ra $-m^3 + 3m - 2 = 0$ hay $m = -2$ hoặc $m = 1$.



✍ **Câu 2.** Tìm hạng của ma trận $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 17 & 3 \\ 4 & a & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng (theo cột) thì hạng của ma trận không đổi

- ☑ Đổi chỗ hai dòng (hai cột) cho nhau
- ☑ Nhân một dòng với số $k \neq 0$
- ☑ Thay dòng i bởi dòng $ti + kj$ với $t \neq 0, k \in \mathbb{R}$ và $i \neq j$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{d_4 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & a & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 17 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 10 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 17 & 1 \\ 4 & 1 & 10 & a \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[d_3 \rightarrow 7d_1 - d_3]{d_4 \rightarrow 4d_1 - d_4, \quad d_2 \rightarrow 2d_1 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 25 & -10 & 20 \\ 0 & 15 & -6 & 12 - a \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \rightarrow \frac{d_3}{5}]{d_4 \rightarrow \frac{d_4}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 - \frac{a}{3} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[d_3 \rightarrow d_3 - d_2]{d_4 \rightarrow d_4 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $a = 0$ thì $\text{Rank} = 2$, $a \neq 0$ thì $\text{Rank} = 3$.



✍ **Câu 3.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & m+1 & -6 \\ 1 & 3 & -2 & m \end{pmatrix}$. Biện luận hạng của ma trận A theo tham số thực m

Lời giải.

$$\xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_4 \rightarrow d_4 - d_1, \quad d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & m+4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \leftrightarrow d_3 - d_2]{d_4 \leftrightarrow d_4 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & m+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+4 \end{pmatrix}$$

Vậy $m = -5$ hoặc $m = -4$ thì $\text{Rank} = 3$ (Nếu $m = -5$ đổi dòng 3 và dòng 4 cho nhau). Và nếu $m \neq -4, -5$ thì $\text{Rank} = 4$.



✍ **Câu 4.** Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- ① Tìm ma trận nghịch đảo của A .
- ② Tìm ma trận X, Y sao cho $AX = B$, $YA^T = B$.

Kiến thức cần lưu ý

☑ Ma trận nghịch đảo có hai cách tìm:

- Tìm bằng công thức: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$

với $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

- Tìm bằng phép biến đổi sơ cấp theo dòng $(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$

☑ Các công thức giải phương trình ma trận

- $AX = B \implies X = A^{-1}B$
- $YA^T = B \implies Y = B(A^T)^{-1} = B(A^{-1})^T$
- Ngoài ra $XA = B \implies X = BA^{-1}$, $A.X.B = C \implies X = A^{-1}CB^{-1}$

Lời giải.

① Tìm bằng công thức

Ta có: $\det(A) = 1.1.2 + 0.0.2 + 1.1.1 - 1.0.1 - 0.1.2 - 1.1.2 = 1$.

Ta tính những thành phần còn lại

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Áp dụng công thức ta có: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tìm bằng biến đổi sơ cấp

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{d_1 \rightarrow d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow d_3 - d_2 \\ d_1 \rightarrow d_1 + d_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_1 \rightarrow -1 \cdot d_1 \\ d_2 \rightarrow -1 \cdot d_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned} AX = B &\longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} YA^T = B &\longrightarrow Y = B(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



 **Câu 5.** Cho A là ma trận vuông cấp 4 có $\det(A) = -2$. Gọi A^* là ma trận phụ hợp của ma trận A . Tính $\det(2A^*)$.

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☒ Công thức cơ bản: $\det(kA) = k^n \det(A)$
- ☒ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$, trong đó A^* là ma trận phụ hợp của ma trận A
- ☒ Công thức liên hệ: $A \cdot A^{-1} = I \longrightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1 \longrightarrow \det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$
- ☒ Ma trận vuông A cấp n thì ma trận phụ hợp A^* cũng là ma trận vuông cấp n

Ta có: $A^* = A^{-1} \det(A) = -2A^{-1}$. Do đó

$$\det(2A^*) = \det(-4A^{-1}) = (-4)^4 \det(A^{-1}) = (-4)^4 \frac{1}{\det(A)} = 2^8 \cdot \frac{1}{-2} = -2^7$$



✍ **Câu 6.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $\det(A) = 3$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$. Tính $\det(B^2)$

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Công thức cơ bản: $\det(B^n) = \det(B)^n$ do $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- ☑ Ma trận vuông A cấp n thì ma trận phụ hợp A^* cũng là ma trận vuông cấp n

Ta có: $B = A^{-1}\det(A) = 3A^{-1}$ (lưu ý B là ma trận phụ hợp của A). Do đó

$$\det(B^2) = \det(B)^2 = \det(3A^{-1})^2 = (3^3 \det(A^{-1}))^2 = \left(3^3 \frac{1}{\det A}\right)^2 = \left(3^3 \frac{1}{3}\right)^2 = 3^4$$



✍ **Câu 7.** Cho A, B là một trận vuông cấp 4 có $\det(A) = 3, \det(B) = 2$ và $(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}C$.

Khi đó $\det(C)$ là

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Ma trận vuông A, B cấp n và có $C = AB$ thì C cũng là ma trận vuông cấp n , do $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$
- ☑ Ma trận vuông A cấp n thì ma trận phụ hợp A^* cũng là ma trận vuông cấp n

Nhận xét trước khi làm: C là ma trận phụ hợp của ma trận AB và ma trận AB là ma trận vuông cấp 4.

Ta có: $C = (AB)^{-1}\det(AB) = (AB)^{-1}\det(A)\det(B) = 6(AB)^{-1}$. Do đó

$$\det(C) = \det(6(AB)^{-1}) = 6^4 \det((AB)^{-1}) = 6^4 \frac{1}{\det(AB)} = 6^4 \frac{1}{\det(A)\det(B)} = 6^3 = 216$$

Ta chọn đáp án C.



✍ **Câu 8.** Cho A, B là các ma trận vuông cấp n biết $A.B = 3I_n$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây là đúng

- ① $B^{-1} = 3A$
- ② $(A^{-1})^T = 3B^T$
- ③ $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- ④ Các câu trên là sai

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Cho k là số thực bất kỳ khi đó $kAB = (kA)B = A(kB)$
- ☑ Cho ma trận A là ma trận vuông cấp n khi đó $A_n \cdot I_n = A_n$
- ☑ Công thức cơ bản: $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$ suy ra $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ khi và chỉ khi $AB = BA$
- ☑ Nếu A và B là hai ma trận nghịch đảo thì $AB = BA = I_n$
- ☑ Nếu $AB = kI_n$ với A, B là ma trận vuông cấp n thì $AB = BA$

① $AB = 3I_n \longrightarrow ABB^{-1} = 3B^{-1} \longrightarrow A = 3B^{-1} \longrightarrow B^{-1} = \frac{A}{3}$ (Sai)

② $AB = 3I_n \longrightarrow B = 3A^{-1} \longrightarrow B^T = (3A^{-1})^T = 3(A^{-1})^T$ (Sai)

③ Ta chứng minh kiến thức lưu ý dòng 3, ta chọn ma trận vuông $C = kB$ khi đó $AC = I_n = CA$ hay $A(kB) = (kB)A \iff AB = BA$ (Đúng)



2 BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Câu 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + (m + 3)y + 7z &= 2 \\ x + (m + 1)y + (m + 1)z &= m - 2 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\overline{A}) = k < n$
- ☑ Nếu hệ có vô số nghiệm khi đó: $s = n - \text{Rank}(A)$, với s là số nghiệm của hệ nghiệm cơ bản

Ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & m+3 & 7 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 & m-2 \end{array} \right)$$

Ta có các phép biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \overline{A} &\xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 0 & m-1 & m-2 & m-3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & m-3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vậy để phương trình có vô số nghiệm thì

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\overline{A}) = 2 \Leftrightarrow m - 3 = 0$$

hay $m = 3$. Khi này ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Chọn y làm ẩn tự do, ta giải được

$$\begin{cases} x &= 1 + 4y \\ z &= -2y \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát là $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$.

Lời giải khác:

Kiến thức cần lưu ý

- ☑ Phương trình có nghiệm duy nhất khi $D \neq 0$
- ☑ Khi $D = 0$ thì ta biện luận phương trình vô nghiệm hoặc vô số nghiệm

Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m+3 & 7 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{pmatrix}$$

Ta có các phép biến đổi như sau:

$$A \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m-3 \end{pmatrix}$$

Do đó $D = (m-1)(m-3)$, để hệ có vô số nghiệm thì $D = 0$ hay $m = 1$ hoặc $m = 3$. Khi $m = 1$ ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 7z = 2 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

Lấy phương trình 1 - phương trình 3 ta được $z = 2$. Lấy phương trình 1 nhân 2 - phương trình 2 ta được $z = 0$ hay mâu thuẫn. Do đó phương trình vô nghiệm. Khi $m = 3$ ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 7z = 2 \\ x + 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

Lấy phương trình 2 - phương trình 3 khi này ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 7z = 2 \end{cases}$$

Lấy phương trình 2 - phương trình 1 nhân 2 khi này ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

Chọn y làm ẩn tự do, ta giải được

$$\begin{cases} x = 1 + 4y \\ z = -2y \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát là $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$.



 **Câu 2.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ ax + y + 2z &= 1 \\ x + y + az &= 2 \end{cases}$$

Khi đó hệ trên là hệ *Cramer* khi và chỉ khi ?

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

☒ Hệ được gọi là hệ *Cramer* khi $D = \det(A) \neq 0$

Ta thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= 3a - a^2 - 2 \\ &= -a^2 + 2a + a - 2 \\ &= -a(a - 2) + (a - 2) \\ &= (1 - a)(a - 2) \end{aligned}$$

Vậy để $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow (1 - a)(a - 2) \neq 0$ hay $a \neq 1$ và $a \neq 2$.



 **Câu 3.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 3 \\ a^2x + 3ay &= 4 \end{cases}$$

Khi đó hệ trên là hệ có đúng một nghiệm khi và chỉ khi ?

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

☒ Hệ có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\overline{A}) = n$

Ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ a^2 & 3a & 4 \end{array} \right)$$

Ta có các phép biến đổi như sau

$$\overline{A} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ a^2 & 3a & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[d_2 \rightarrow 2d_1 - d_2]{d_3 \rightarrow d_3 - a^2 d_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3a - 2a^2 & 4 - 3a^2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - (3a - 2a^2)d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - 3a - a^2 \end{array} \right) \end{aligned}$$



Vậy để phương trình có đúng một nghiệm thì

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = 2 \Leftrightarrow 4 - 3a - a^2 = 0 \Leftrightarrow (4 + a)(1 - a) = 0$$

hay $a = -4$ hoặc $a = 1$.

Lời giải khác: từ phương trình 1, 2 giải ra được $x = 1, y = 1$. Do hệ có đúng một nghiệm nên thay cặp nghiệm này vào phương trình 3 thì thỏa mãn hay ta có $a^2 + 3a = 4 \Leftrightarrow a = -4$ hoặc $a = 1$

Câu 4. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 2y + mz &= 3 + m \\ 2x + my - 3z &= m - 1 \\ 2x - my + 2mz &= -2 \end{cases}$$

Cho biết $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là nghiệm. Chọn mệnh đề đúng:

- ① $m = -4$ và hệ có vô số nghiệm.
- ② $m = -4$ và hệ có nghiệm duy nhất.
- ③ $m = -2$ và hệ có vô số nghiệm.
- ④ $m = -4$ và hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = k < n$

Hệ có nghiệm $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ nên $2 + m = -2 \Leftrightarrow m = -4$. Ma trận hệ số mở rộng là

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & 3 + m \\ 2 & m & -3 & m - 1 \\ 2 & -m & 2m & -2 \end{array} \right)$$

Ta có phép biến đổi như sau

$$\bar{A} \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & 3 + m \\ 0 & m - 4 & -3 - 2m & -m - 7 \\ 0 & -m - 4 & 0 & -2(4 + m) \end{array} \right)$$

do $m = -4$ nên $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(\bar{A}) = 2 < 3$ hay hệ có vô số nghiệm.



✍ **Câu 5.** Trong mô hình Input - Output Mở Leontief, biết ma trận đầu vào như sau

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

- ① Nói ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{21} = 0,3$.
- ② Biết sản lượng của ngành 2 là 100, tính giá trị của lượng nguyên liệu mà các ngành cung cấp cho nó.
- ③ Tìm ma trận nghịch đảo của $I_3 - A$.
- ④ Tìm mức sản lượng của ba ngành, nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng (39, 46, 16).
- ⑤ Nếu yêu cầu xuất khẩu dự trữ thay đổi đối với các ngành lần lượt là $\Delta D = (3, -2, 0)$, hãy tính mức thay đổi sản lượng của các ngành.

Lời giải.

Kiến thức cần lưu ý

✓ $A \cdot X = Y, \quad (I_n - A) \cdot X = D$ trong đó

- $X = (x_1, x_2, x_3)$ là tổng sản lượng đầu ra của ba ngành
- $Y = (y_1, y_2, y_3)$ là tổng nguyên liệu đầu vào của ba ngành
- $D = (d_1, d_2, d_3)$ là giá trị sản lượng cung cấp cho nhu cầu ngành mở

✓ Nếu nhu cầu ngành mở tăng một lượng $\Delta D = (...)$ thì mức tăng sản lượng tương ứng của các ngành được xác định bởi $\Delta X = (I - A)^{-1} \cdot \Delta D$

- ① Để có 1 đơn vị sản phẩm (sản lượng) đầu ra của ngành 1 cần 0,3 đơn vị nguyên liệu đầu vào của ngành 2
- ② Ta thực hiện phép tính

$$100 \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Vậy giá trị lượng nguyên liệu của của ngành 1, 2, 3 cung cấp cho ngành 2 lần lượt là 20, 10, 30

- ③ Ta có phép biến đổi sau

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 \\ -0,3 & 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ta tính nghịch đảo của ma trận $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. Dễ dàng tính $\text{Det}(B) = 488$, ta tính các thành phần còn lại

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 69, C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 26, C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 27 \\ C_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 25, C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 66, C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 31 \\ C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 29, C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 18, C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 75 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } B^{-1} = \frac{1}{488} \begin{pmatrix} 69 & 25 & 29 \\ 26 & 66 & 18 \\ 27 & 31 & 75 \end{pmatrix}, \text{ vậy } (I_3 - A)^{-1} = 10B^{-1} = \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 69 & 25 & 29 \\ 26 & 66 & 18 \\ 27 & 31 & 75 \end{pmatrix}$$

④ Ta có

$$X = (I_n - A)^{-1}D = \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 69 & 25 & 29 \\ 26 & 66 & 18 \\ 27 & 31 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 46 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 4305 \\ 4338 \\ 3679 \end{pmatrix}$$

⑤ Khi này ta có

$$(I_3 - A)\Delta X = \Delta D \implies \Delta X = (I_3 - A)^{-1}\Delta D = \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 69 & 25 & 29 \\ 26 & 66 & 18 \\ 27 & 31 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta biến đổi tiếp như sau

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 69 & 25 & 29 \\ 26 & 66 & 18 \\ 27 & 31 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 69.3 + 25.(-2) + 29.0 \\ 26.3 + 66.(-2) + 18.0 \\ 27.3 + 31.(-2) + 75.0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10}{488} \begin{pmatrix} 157 \\ -54 \\ 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



 **Câu 6.** Xét mô hình Input - Output Mở Leontief gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào là

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & m & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

- ① Giải thích ý nghĩa kinh tế của a_{23} . Từ đó tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi giá trị đầu ra của ngành là 200 (đơn vị tiền).
- ② Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{03} . Từ đó suy ra ngành mở phải đóng góp bao nhiêu cho ngành 3 khi giá trị sản lượng của ngành 3 là 1000 (đơn vị tiền).
- ③ Hãy tìm giá trị của m , biết rằng ngành mở phải đóng góp 150 (đơn vị tiền) cho ngành 2 khi giá trị sản lượng của ngành 2 là 500 (đơn vị tiền).
- ④ Với $m = 0,4$ hãy tìm giá trị sản lượng của ba ngành nếu biết yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành lần lượt là 66, 124, 100.

Lời giải.

- ① Để có 1 đơn vị sản phẩm (sản lượng) đầu ra của ngành 3 cần 0,1 nguyên liệu đầu vào của ngành 2. Số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 là

$$200 \cdot 0,1 = 20 \quad (\text{đơn vị tiền})$$

- ② Ta có: $a_{03} = 1 - (a_{13} + a_{23} + a_{33}) = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,3) = 0,4$, nghĩa là ngành mở đóng góp 0,4 (đơn vị tiền) cho ngành 3 để ngành 3 sản xuất một lượng hàng trị giá 1 (đơn vị tiền). Ngành mở phải đóng góp cho ngành 3 là

$$0,4 \cdot 1000 = 400 (\text{đơn vị tiền})$$

- ③ Ta có: $a_{02} = 1 - (a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1 - (0,1 + m + 0,2) = 0,7 - m$, vậy ta có

$$500(0,7 - m) = 150 \iff 200 = 500m \iff m = 0,4$$

- ④ Ta có: $(I - A)X = D \implies X = (I - A)^{-1}D$, ta thực hiện phép tính

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Hay ta có

$$(I - A)^{-1} = \frac{10}{219} \begin{pmatrix} 40 & 11 & 13 \\ 17 & 43 & 11 \\ 22 & 17 & 40 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$X = \frac{10}{219} \begin{pmatrix} 40 & 11 & 13 \\ 17 & 43 & 11 \\ 22 & 17 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 66 \\ 124 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{10}{219} \begin{pmatrix} 5304 \\ 7554 \\ 7560 \end{pmatrix}$$

Lời giải khác: Tính bằng định thức

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 124 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,219 \neq 0, D_{x_1} = \frac{1326}{25}, D_{x_2} = \frac{3777}{50}, D_{x_3} = \frac{378}{5}$$

Do đó

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{1326}{25} : 0,219 = \frac{17680}{73} \\ x_2 &= \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{3777}{50} : 0,219 = \frac{25180}{73} \\ x_3 &= \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{378}{5} : 0,219 = \frac{25200}{73} \end{aligned}$$



3 BÀI TẬP CHƯƠNG 3

A Đề bài

1 Trắc nghiệm

✍ **Câu 1.** Khẳng định nào sau đây đúng ?

- ☐ (A) Nếu f liên tục tại x_0 thì f có đạo hàm tại x_0 .
☐ (B) f liên tục trên $[a, b]$ nếu f khả tích trên $[a, b]$.
☐ (C) f khả vi tại x_0 thì f xác định tại x_0 .
☐ (D) f đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

✍ **Câu 2.** Hàm $f(x) = x|x - 1|$

- ☐ (A) Liên tục tại $x_0 = 1$.
☐ (B) Có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
☐ (C) Khả vi tại $x_0 = 1$.
☐ (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 3.** Tìm các giới hạn:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} \quad (a > 0)$$

- ☐ (A) $I = \frac{1}{a}$.
☐ (B) $I = 1$.
☐ (C) $I = 2$.
☐ (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 4.** Tính

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x \ln x}$$

- ☐ (A) $I = e$.
☐ (B) $I = 1$.
☐ (C) $I = 2$.
☐ (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 5.** Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên (a, b) thì

- ☐ (A) $f(x)$ có đạo hàm trên (a, b) .
☐ (B) $f(x)$ đạt GTLN và GTNN trên (a, b) .
☐ (C) $f(x)$ bị chặn trên (a, b) .
☐ (D) Cả 3 câu trên đều sai.

✍ **Câu 6.** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^{2x} - 1} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- ☐ (A) Liên tục tại $x_0 = 0$.
☐ (B) Có đạo hàm tại $x_0 = 0$.
☐ (C) Khả tích trên $[a, b]$.
☐ (D) Cả 3 câu trên đều sai.

✍ **Câu 7.** Khẳng định sau đây là đúng ?

- ☐ (A) f có giới hạn tại x_0 nếu f có $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.
☐ (B) f liên tục tại $x_0 = 0$ thì f có đạo hàm tại $x_0 = 0$.
☐ (C) f có đạo hàm tại x_0 nếu f có $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.
☐ (D) Cả 3 câu trên đều sai.

✍ **Câu 8.** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{mx} - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ m^2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Tìm m để f liên tục tại $x_0 = 0$.

- ☐ (A) $m = 1$.
☐ (B) $m = 2$.
☐ (C) $m = 3$.
☐ (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 9.** Cho $f(x) = x - 2$ và $x_0 = 2$

- (A) $|f(x)|$ gián đoạn tại x_0 . (B) $|f(x)|$ không xác định được tại x_0 .
(C) $|f(x)|$ khả vi tại x_0 . (D) $|f(x)|$ liên tục tại x_0 .

✍ **Câu 10.** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Tìm m để f khả vi tại $x_0 = 0$, tính $f'(0)$

- (A) $m = 1, f'(0) = 0$. (B) $m = 1, f'(0) = 1$. (C) $m = 1, f'(0) = \frac{1}{2}$. (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 11.** Đặt

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^x, \quad K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$$

- (A) $L = 0, K = \sqrt{e}$. (B) $L = 1, K = \sqrt{e}$. (C) $L = 2, K = 0$. (D) $L = +\infty, K = \sqrt{e}$.

✍ **Câu 12.** Cho $f(x) = \alpha(x)|x - 1|$ với $\alpha(x)$ xác định trong lân cận của 1. Khi đó

- (A) $f(x)$ có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại 1 nếu $\alpha(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.
(B) $f(x)$ có đạo hàm tại 1 nếu $\alpha(x)$ là vô cùng bé khi $x \rightarrow 1$.
(C) $f(x)$ liên tục tại 1 nếu $\alpha(x)$ bị chặn trong lân cận tại 1.
(D) Cả ba câu trên đều đúng.

✍ **Câu 13.** Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

- (A) f không liên tục tại $x = 0$. (B) $f'(0) = 0$.
(C) f không khả vi tại $x_0 = 0$. (D) Cả a, b, c đều sai.

✍ **Câu 14.** Cho hàm tổng chi phí : $c = \frac{3q^2}{\sqrt{q^2 + 5}} + 3000$ với q là sản lượng. Chi phí biên khi $q = 10$ là

- (A) 5, 12. (B) 3, 07. (C) 4, 32. (D) 5, 75.

✍ **Câu 15.** Cho hàm tổng chi phí : $Q_s = P^2 + P - 200$ với P là giá bán sản phẩm đó. Hệ số co giãn của hàm cung theo giá (E_s) tại giá $P = 20$.

- (A) $E_s = \frac{500}{29}$. (B) $E_s = \frac{50}{11}$. (C) $E_s = \frac{50}{22}$. (D) $E_x = \frac{41}{11}$.

2 Tự Luận

✍ **Câu 1.** Tính đạo hàm của hàm : $f(x) = x|x - 2|$

✍ **Câu 2.** Cho hàm $y(x)$ thỏa : $e^{y(x)} + x \cdot y(x) = e$. Tính đạo hàm của y tại $x = 0$

✍ **Câu 3.** Cho $y = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

① Tìm A, B để $y = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

② Tính y^n

✍ **Câu 4.** Cho $y = x^2 e^{ax}$, tính $d^{50}y(0)$

✍ **Câu 5.** Tính gần đúng $\arctg(1,02)$

B Lời giải

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- (A) Nếu f liên tục tại x_0 thì f có đạo hàm tại x_0 .
- (B) f liên tục trên $[a, b]$ nếu f khả tích trên $[a, b]$.
- (C) f khả vi tại x_0 thì f xác định tại x_0 .
- (D) f đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Lời giải.

Xét câu a), xét hàm số $f(x) = |x|$ ta có f liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Xét câu c), f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại x_0 hay f xác định tại x_0 .

Xét câu d), Ta xét hàm số

$$y = |x|$$

khi đó f có cực tiểu tại $x_0 = 0$ nhưng không khả vi tại $x_0 = 0$ hay $f'(x_0) \neq 0$.

Xét câu b), xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

hay f gián đoạn tại $x_0 = 0$. Mặt khác hàm f bị chặn trên đoạn $[-1, 1]$ vì

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

Lý thuyết

Các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$; các hàm bị chặn, có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đoạn $[a, b]$ và các hàm đơn điệu bị chặn trên đoạn $[a, b]$ đều khả tích trên đoạn đó.

Vậy rõ ràng f khả tích trên đoạn $[-1, 1]$ nhưng f lại gián đoạn tại $x_0 = 0$.

Chứng minh

Let f be a bounded function from a bounded closed interval $[a, b]$ to $\mathbb{R}$. If the set of discontinuities of f is finite, then f is integrable on $[a, b]$.

Proof. Let D be the set of discontinuities of f . By our assumption, D is finite. So the set $D \cup \{a, b\}$ can be expressed as $\{d_0, d_1, \dots, d_N\}$ with $a = d_0 < d_1 < \dots < d_N = b$. Let $M := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. For an arbitrary positive number ε , we choose $\eta > 0$ such that $\eta < \varepsilon/(8MN)$ and $\eta < (d_j - d_{j-1})/3$ for all $j = 1, \dots, N$. For $j = 0, 1, \dots, N$, let $x_j := d_j - \eta$ and $y_j := d_j + \eta$. Then we have

$$a = d_0 < y_0 < x_1 < d_1 < y_1 < \dots < x_N < d_N = b.$$

Let E be the union of the intervals $[d_0, y_0], [x_1, d_1], [d_1, y_1], \dots, [x_{N-1}, d_{N-1}], [d_{N-1}, y_{N-1}]$, and $[x_N, d_N]$. There are $2N$ intervals in total. For $j = 1, \dots, N$, let $F_j := [y_{j-1}, x_j]$. Further, let $F := \cup_{j=1}^N F_j$. The function f is continuous on F , which is a finite union of bounded closed intervals. Hence f is uniformly continuous on F . There exists some $\delta > 0$ such that $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2(b-a))$ whenever $x, y \in F$ satisfying $|x - y| < \delta$. For each $j \in \{1, \dots, N\}$, let P_j be a partition of F_j such that $\|P_j\| < \delta$. Let

$$P := \{a, b\} \cup D \cup \left(\cup_{j=1}^N P_j\right).$$

The set P can be arranged as $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ with $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Consider

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}),$$

where $M_i := \sup \{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ and $m_i := \inf \{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$. Each interval $[t_{i-1}, t_i]$ is either contained in E or in F , but not in both. Hence

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) = \sum_{[t_{i-1}, t_i] \subseteq E} (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{[t_{i-1}, t_i] \subseteq F} (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}).$$

There are $2N$ intervals $[t_{i-1}, t_i]$ contained in E . Each interval has length $\eta < \varepsilon/(8MN)$. Noting that $M_i - m_i \leq 2M$, we obtain

$$\sum_{[t_{i-1}, t_i] \subseteq E} (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) \leq 2N(2M)\eta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

If $[t_{i-1}, t_i] \subseteq F$, then $t_i - t_{i-1} < \delta$; hence $M_i - m_i < \varepsilon/(2(b-a))$. Therefore,

$$\sum_{[t_{i-1}, t_i] \subseteq F} (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{[t_{i-1}, t_i] \subseteq F} (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

From the above estimates we conclude that $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. By Theorem 1.1, the function f is integrable on $[a, b]$.



 **Câu 2.** Hàm $f(x) = x|x-1|$

(A) Liên tục tại $x_0 = 1$.

(B) Có đạo hàm $x_0 = 1$.

(C) Khả vi tại $x_0 = 1$.

(D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

Ta có hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & , \quad x \geq 1 \\ x(1-x) & , \quad x < 1 \end{cases}$$

Hàm là hàm sơ cấp nên liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x = -1$$

Do đó không tồn tại giới hạn hữu hạn vì

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

hay f không khả vi tại $x_0 = 1$



 **Câu 3.** Tìm các giới hạn:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} \quad (a > 0)$$

(A) $I = \frac{1}{a}$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = 2$.

(D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} \quad (a > 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a} \cdot a} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$



 **Câu 4.** Tính

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x \ln x}$$

(A) $I = e$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = 2$.

(D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\ln x + 1} \quad (L'hospital) \\ &= e \end{aligned}$$



 **Câu 5.** Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên (a, b) thì

(A) $f(x)$ có đạo hàm trên (a, b) .

(B) $f(x)$ đạt GTLN và GTNN trên (a, b) .

(C) $f(x)$ bị chặn trên (a, b) .

(D) Cả 3 câu trên đều sai.

Lời giải.

Xét câu a) liên tục chưa chắc đạo hàm ví dụ $f(x) = |x|$

Xét câu b) đạt GTLN và GTNN chỉ trên $[a, b]$

Xét câu c) f liên tục trên (a, b) chưa chắc bị chặn (a, b) . Nếu xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x-a}$ trên khoảng (a, b) thì khi $x \rightarrow a$ thì $f(x) \rightarrow \infty$ nên f không bị chặn.



 **Câu 6.** Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^{2x} - 1} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

(A) Liên tục tại $x_0 = 0$.

(B) Có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

(C) Khả tích trên $[a, b]$.

(D) Cả 3 câu trên đều sai.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \cdot 2x}{(e^{2x} - 1) \cdot 2x} = \frac{1}{2} \neq 0$$

vậy f không liên tục tại $x_0 = 0$, do đó f không có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Biểu diễn hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{e^{2x} - 1}$ thì f bị chặn hay f khả tích trên $[a, b]$ nếu đoạn chứa 0. Nếu $[a, b]$ không chứa 0 do f liên tục nên f khả tích. Vậy đáp án c) đúng



Câu 7. Khẳng định sau đây là đúng ?

- (A) f có giới hạn tại x_0 nếu f có $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.
 (B) f liên tục tại $x_0 = 0$ thì f có đạo hàm tại $x_0 = 0$.
 (C) f có đạo hàm tại x_0 nếu f có $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.
 (D) Cả 3 câu trên đều sai.

Lời giải.

Xét câu c), nếu $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ thì f không có đạo hàm tại x_0 .

Xét câu b), xét hàm $f(x) = |x|$ suy ra mâu thuẫn.

Xét câu a), nếu $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ thì f khả vi tại x_0 hay f liên tục tại x_0 tức tại x_0 thì f có giới hạn.
 Nếu $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ thì lập luận tương tự suy ra f gián đoạn tại x_0 .

○

Câu 8. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{mx} - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m^2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- (A) $m = 1$. (B) $m = 2$.
 (C) $m = 3$. (D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m(e^{mx} - 1)}{mx} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \\ &= m + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

Cách khác

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (me^{mx} + \sin x) \quad (L'hospital) \\ &= m \end{aligned}$$

vậy $I = m$, để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ thì $m^2 = m$ hay $m = 0$ hoặc $m = 1$.

○

Câu 9. Cho $f(x) = x - 2$ và $x_0 = 2$

- (A) $|f(x)|$ gián đoạn tại x_0 . (B) $|f(x)|$ không xác định được tại x_0 .
 (C) $|f(x)|$ khả vi tại x_0 . (D) $|f(x)|$ liên tục tại x_0 .

Lời giải.

Ta có hàm $|x - a|$ không khả vi tại $x_0 = a$ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy đáp án D đúng.

○

Câu 10. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Tìm m để f khả vi tại $x_0 = 0$, tính $f'(0)$

- (A) $m = 1, f'(0) = 0$. (B) $m = 1, f'(0) = 1$. (C) $m = 1, f'(0) = \frac{1}{2}$. (D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

f khả vi tại $x_0 = 0$ thì f phải liên tục tại $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

vậy để f liên tục tại $x_0 = 0$ thì $m = 1$. Giả sử tồn tại $f'(0)$ tại $m = 1$, khi đó

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (L'hospital) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

vậy $f'(0) = \frac{1}{2}$.



✍ **Câu 11.** Đặt

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^x, \quad K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$$

- Ⓐ $L = 0, K = \sqrt{e}$. Ⓑ $L = 1, K = \sqrt{e}$. Ⓒ $L = 2, K = 0$. Ⓓ $L = +\infty, K = \sqrt{e}$.

Lời giải.

Ta có $(2x)^x = e^{x \ln(2x)}$, suy ra $x \rightarrow 0^+$ thì

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(2x)} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x)}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$



✍ **Câu 12.** Cho $f(x) = \alpha(x)|x - 1|$ với $\alpha(x)$ xác định trong lân cận của 1. Khi đó

- Ⓐ $f(x)$ có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại 1 nếu $\alpha(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.
 Ⓑ $f(x)$ có đạo hàm tại 1 nếu $\alpha(x)$ là vô cùng bé khi $x \rightarrow 1$.
 Ⓒ $f(x)$ liên tục tại 1 nếu $\alpha(x)$ bị chặn trong lân cận tại 1.
 Ⓓ Cả ba câu trên đều đúng.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x)(x - 1) & \text{nếu } x \geq 1 \\ \alpha(x)(1 - x) & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Ta tính đạo hàm trái

$$\begin{aligned} f'(x_0^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x)(1 - x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\alpha(x) \\ &= -L \end{aligned}$$

Tương tự, ta tính đạo hàm phải

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha(x)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \alpha(x) \\ &= L \end{aligned}$$

vậy câu a), đúng. Ta xét câu b), do $\alpha(x)$ là vô cùng bé khi $x \rightarrow 1$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$$

kết hợp với câu a) ta có

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$$

nên f có đạo hàm tại 1. Xét câu c), nếu $\alpha(x)$ bị chặn trong lân cận tại 1 thì

$$|\alpha(x)| \leq |M| \Rightarrow -M|x - 1| \leq \alpha(x)|x - 1| \leq M|x - 1|$$

khi $x \rightarrow 1$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-M(x - 1)) = \lim_{x \rightarrow 1} (M(x - 1)) = 0$$

nên theo định lý kẹp thì

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$$

suy ra f liên tục tại 1. Vậy d) là đáp án đúng.



 **Câu 13.** Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

(A) f không liên tục tại $x=0$.

(B) $f'(0) = 0$.

(C) f không khả vi tại $x_0 = 0$.

(D) Cả a, b, c đều sai.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sin x \right) = 1$$

hay f liên tục tại $x_0 = 0$. Giả sử f khả vi tại $x_0 = 0$ khi đó

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - (x+1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - (1+x)}{x^2} + \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{2x+1} + x + 1)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $f'(0) = 0$

✍ **Câu 14.** Cho hàm tổng chi phí : $c = \frac{3q^2}{\sqrt{q^2 + 5}} + 3000$ với q là sản lượng. Chi phí biên khi $q = 10$

- là
- (A) 5, 12. (B) 3, 07. (C) 4, 32. (D) 5, 75.

Lời giải.

✍ **Câu 15.** Cho hàm tổng chi phí : $Q_s = P^2 + P - 200$ với P là giá bán sản phẩm đó. Hệ số co giãn của hàm cung theo giá (E_s) tại giá $P = 20$.

- (A) $E_s = \frac{500}{29}$. (B) $E_s = \frac{50}{11}$. (C) $E_s = \frac{50}{22}$. (D) $E_s = \frac{41}{11}$.

Lời giải.

Ta có

$$E_s = Q'_s \cdot \frac{P}{Q} = \frac{d}{dP} (P^2 + P - 200)_{P=20} \cdot \frac{P}{P^2 + P - 200}_{P=20} = \frac{41}{11}$$

2 Tự luận

✍ **Câu 1.** Tính đạo hàm của hàm: $f(x) = x|x - 2|$

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & \text{nếu } x \geq 2 \\ x(2-x) & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{nếu } x > 2 \\ \text{không xác định} & \text{nếu } x = 2 \\ -2x + 2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Hoặc tính như sau tại $x > 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)(x + \Delta x - 2) - x(x - 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x - 2 + \Delta x \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Tương tự với $x < 0$.

Hoặc cách khác, áp dụng công thức đạo hàm ta có

$$f'(x) = |x - 2| + x(|x - 2|)' = |x - 2| + \frac{x(x - 2)}{|x - 2|}$$

 **Câu 2.** Cho hàm $y(x)$ thỏa : $e^{y(x)} + x \cdot y(x) = e$. Tính đạo hàm của y tại $x = 0$

Lời giải.

Đạo hàm $y(x)$ theo x ta có

$$y'(x) \cdot e^{y(x)} + y(x) + x \cdot y'(x) = 0$$

Thay $x = 0$ ta có

$$y'(0) = \frac{-y(0)}{e^{y(0)}}$$

Mà từ đề bài thay $x = 0$ ta có $e^{y(0)} = e$ tương đương $y(0) = 1$. Vậy $y'(0) = \frac{-1}{e}$.

 **Câu 3.** Cho $y = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

① Tìm A, B để $y = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$

② Tính y^n

Lời giải.

① Ta có

$$A(x - 2) + B(x - 1) = x + 2 \iff (A + B)x - 2A - B = 2$$

đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B = 2 \end{cases}$$

vậy $A = -3, \quad B = 4$.

② Ta có

$$y^{(n)} = \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \right)^{(n)} = \left(\frac{-3}{x-1} \right)^{(n)} + \left(\frac{4}{x-2} \right)^{(n)}$$

Mà ta có $\left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot a^n \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n+1}}$, áp dụng thì ta có

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left(\frac{-3}{(x-1)^{n+1}} + \frac{4}{(x-2)^{n+1}} \right)$$

○

 **Câu 4.** Cho $y = x^2 e^{ax}$, tính $d^{50}y(0)$

Lời giải.

Ta có

$$(x^2 \cdot e^{ax})^{(50)} = \sum_i^{50} C_{50}^i (x^2)^{(i)} (e^{ax})^{(50-i)}$$

Mà $(x^2)^{(2)} = 2 \rightarrow (x^2)^{(n)} = 0, \quad n \geq 3$ thay vào ta có

$$\begin{aligned} (x^2 \cdot e^{ax})^{(50)} &= C_{50}^1 (x^2)^{(1)} (e^{ax})^{(49)} + C_{50}^2 (x^2)^{(2)} (e^{ax})^{(48)} \\ &= 50 \cdot 2x \cdot a^{49} \cdot e^{ax} + C_{50}^2 \cdot 2 \cdot a^{48} \cdot e^{ax} \end{aligned}$$

thay $x = 0$ ta có $d^{50}y(0) = C_{50}^2 \cdot 2 \cdot a^{48}$

○

 **Câu 5.** Tính gần đúng $\arctg(1,02)$

Lời giải.

Ta có:

$$f(1 + 0,02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,02 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,9754$$

(công thức đầy đủ là $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ và $(\arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$)

○

4 BÀI TẬP CHƯƠNG 4

 **Câu 1.** Tìm cực trị của các hàm sau đây

① $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$

② $f(x, y) = x + y + \frac{8}{xy}$

③ $f(x, y) = x + y + \frac{81}{xy}$

④ $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

⑤ $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

⑥ $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy + 1$

Lời giải.

① Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = 3x - 3y + 4 = 0 \\ f_y = 4y - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có $(x, y) = (-10, -8)$. Vậy điểm dừng là $M(-10, -8)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = -3$$

Khi này $D_1 = f_{xx} = 2 > 0$ và

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0$$

Do $D_2 < 0$ nên f không đạt cực trị tại $M(-10, -8)$.

② Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = 1 - \frac{8}{x^2 \cdot y} \\ f_y = 1 - \frac{8}{x \cdot y^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} \frac{8}{x^2 \cdot y} = 1 \\ \frac{8}{x \cdot y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 8 = x^2 \cdot y = x \cdot y^2 \Leftrightarrow xy(x - y) = 0$$

Do $x, y \neq 0$ nên $x = y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $x = y = 2$. Vậy điểm dừng là $M(2, 2)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3 \cdot y}, \quad f_{yy} = \frac{16}{x \cdot y^3}, \quad f_{xy} = \frac{8}{x^2 \cdot y^2}$$

Tại điểm dừng ta có $D_1 = f_{xx} = \frac{16}{2^4} = 1 > 0$ và

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} > 0$$

Do $D_2 > 0$ và $D_1 > 0$ nên f đạt cực tiểu địa phương tại $M(2, 2)$.

③ Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = 1 - \frac{81}{x^2 \cdot y} \\ f_y = 1 - \frac{81}{x \cdot y^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} \frac{81}{x^2 \cdot y} = 1 \\ \frac{81}{x \cdot y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 81 = x^2 \cdot y = x \cdot y^2 \Leftrightarrow xy(x - y) = 0$$

Do $x, y \neq 0$ nên $x = y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $x = y = \sqrt[3]{81}$. Vậy điểm dừng là $M(\sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{81})$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3 \cdot y}, \quad f_{yy} = \frac{16}{x \cdot y^3}, \quad f_{xy} = \frac{8}{x^2 \cdot y^2}$$

Tại điểm dừng ta có $D_1 = f_{xx} = \frac{16}{\sqrt[3]{81}^4} > 0$ và

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{16}{81 \cdot \sqrt[3]{81}} & \frac{8}{81 \cdot \sqrt[3]{81}} \\ \frac{8}{81 \cdot \sqrt[3]{81}} & \frac{16}{81 \cdot \sqrt[3]{81}} \end{vmatrix} > 0$$

Do $D_2 > 0$ và $D_1 > 0$ nên f đạt cực tiểu địa phương tại $M(\sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{81})$.

④ Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = y - \frac{50}{x^2} \\ f_y = x - \frac{20}{y^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} x^2 \cdot y = 50 \\ x \cdot y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x^3 y^3 = 1000$$

hay $xy = 10$ thay vào hệ trên ta được $(x, y) = (5, 2)$. Vậy điểm dừng là $M(5, 2)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = \frac{100}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{40}{y^3}, \quad f_{xy} = 1$$

Tại điểm dừng ta có $D_1 = f_{xx} = \frac{100}{5^3} > 0$ và

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{100}{5^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{2^3} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Do $D_2 > 0$ nên f đạt cực tiểu địa phương tại $M(5, 2)$.

⑤ Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y \\ f_y = 3y^2 + 3x \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3(x - y)(x + y - 1) = 0$$

với $y = 1 - x$ thay vào ta có hệ vô nghiệm, với $x = y$ ta có nghiệm là $(x, y) = (0, 0), (-1, -1)$. Vậy có hai điểm dừng là $M_1(0, 0), M_2(-1, -1)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = 3$$

Khi này ta có

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

- Tại M_1 ta có $D_1 = 0$ và $D_2 = -9 < 0$ nên f không đạt cực trị tại $M(0, 0)$.
- Tại $M_2(-1, -1)$ ta có $D_1 = -6 < 0$ và $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$ nên f đạt cực đại địa phương tại $M(-1, -1)$.

⑥ Ta có đạo hàm cấp 1 của $f(x, y)$ là

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 12y \\ f_y = 3y^2 + 12x \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình như sau

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 3y^2 + 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3(x - y)(x + y - 4) = 0$$

với $y = 4 - x$ thay vào ta có hệ vô nghiệm, với $x = y$ ta có nghiệm là $(x, y) = (0, 0), (-4, -4)$. Vậy có hai điểm dừng là $M_1(0, 0), M_2(-4, -4)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = 12$$

Khi này ta có

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 144$$

- Tại M_1 ta có $D_1 = 0$ và $D_2 = -144 < 0$ nên f không đạt cực trị tại $M(0, 0)$.

- Tại $M_2(-4, -4)$ ta có $D_1 = -24 < 0$ và $D_2 = 432 > 0$ nên f đạt cực đại địa phương tại $M(-4, -4)$.



✍ **Câu 2.** Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau đây

- ① $f(x, y) = x^2 + y^2$ nếu x, y thỏa mãn $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
 ② $f(x, y) = x^2 + y^2$ nếu x, y thỏa mãn $x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0$
 ③ $f(x, y) = x^2 + 12xy + y^2$ nếu x, y thỏa mãn $4x^2 + y^2 = 25$

Lời giải.

- ① Ta lập hàm *Lagrange*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3} \right)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_x = 2x - \frac{\lambda}{4} \\ L_y = 2y - \frac{\lambda}{3} \\ L_\lambda = 1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3} \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \lambda = 8x \\ \lambda = 6y \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

Ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, \lambda) = \left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}, \frac{288}{25} \right)$. Hay điểm dừng là $M\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$.

Ta có

$$|\overline{H}| = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Trong đó

- ✓ g_i là hàm điều kiện đạo hàm (1 là x , 2 là y)
 ✓ L_{ij} là đạo hàm theo i , rồi đạo hàm theo j (đạo hàm 2 lần)

Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = \frac{-1}{4}, \quad g_2 = \frac{-1}{3}, \quad L_{11} = 2, \quad L_{22} = 2, \quad L_{12} = 0$$

Vậy

$$|\overline{H}| = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} < 0$$

Vậy $M\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ là điểm cực tiểu toàn cục của f .

② Ta lập hàm *Lagrange*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(-x^2 + 3x - y^2 + 4y)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_x = 2(1 - \lambda)x + 3\lambda \\ L_y = 2(1 - \lambda)y + 4\lambda \\ L_\lambda = -x^2 + 3x - y^2 + 4y \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ y = 2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, \lambda) = (3, 4, 2); (0, 0, 0)$. Hay có hai điểm dừng là $M_1(3, 4, 2)$ và $M_2(0, 0, 0)$.

Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -2x + 3, \quad g_2 = -2y + 4, \quad L_{11} = 2(1 - \lambda), \quad L_{22} = 2(1 - \lambda), \quad L_{12} = 0$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -2x + 3 & -2y + 4 \\ -2x + 3 & 2(1 - \lambda) & 0 \\ -2y + 4 & 0 & 2(1 - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= 2(-2x + 3)^2(\lambda - 1) + 2(-2y + 4)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

- Tại M_1 do $\lambda = 2 > 1$ nên $|\overline{H}| > 0$, hay f đạt cực đại địa phương tại $M(3, 4)$.
- Tại M_2 do $\lambda = 0 < 1$ nên $|\overline{H}| < 0$, hay f không có cực trị.

③ Ta lập hàm *Lagrange*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(25 - 4x^2 - y^2)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_x = 2(1 - 4\lambda)x + 12y \\ L_y = 2(1 - \lambda)y + 12x \\ L_\lambda = 25 - 4x^2 - y^2 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ y = 2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \left(\pm \sqrt{\frac{200}{\sqrt{65} + 65}}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{65}} \sqrt{\sqrt{65} + 1} \right)$
 $; \left(\pm \sqrt{\frac{200}{65 - \sqrt{65}}}, \pm \frac{-5\sqrt{2}}{2\sqrt{65}} \sqrt{\sqrt{65} - 1} \right)$. Hay có hai điểm dừng
 Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -8x, \quad g_2 = -2y, \quad L_{11} = 2(1 - 4\lambda), \quad L_{22} = 2(1 - \lambda), \quad L_{12} = 12$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -8x & -2y \\ -8x & 2(1 - 4\lambda) & 12 \\ -2y & 12 & 2(1 - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= 192xy + 192xy + 128x^2(\lambda - 1) + 8y^2(4\lambda - 1) \end{aligned}$$

- Tại $\left(\pm \sqrt{\frac{200}{\sqrt{65} + 65}}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{65}} \sqrt{\sqrt{65} + 1} \right)$ do $\lambda > 1$ nên $|\overline{H}| > 0$, hay f đạt cực đại địa phương.
- Tại $\left(\pm \sqrt{\frac{200}{65 - \sqrt{65}}}, \pm \frac{-5\sqrt{2}}{2\sqrt{65}} \sqrt{\sqrt{65} - 1} \right)$ do $\lambda < \frac{1}{4}$ nên $|\overline{H}| < 0$, hay f đạt cực tiểu địa phương.



 **Câu 3.** Hàm $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$ có hai điểm dừng là $A(0, 0)$ và $B(18, 6)$. Chọn kết luận đúng

- (A) Hàm f không đạt cực trị địa phương tại A , đạt cực đại địa phương tại B .
- (B) Hàm f đạt cực tiểu địa phương tại A , đạt cực đại địa phương tại B .
- (C) Hàm f không đạt cực trị địa phương tại A , đạt cực tiểu địa phương tại B .
- (D) Hàm f đạt cực đại địa phương tại A , đạt cực tiểu địa phương tại B .

Lời giải.

Ta tính đạo hàm cấp hai của f

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -6$$

Khi này ta có

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{vmatrix} = 12y - 36$$

- Tại $A(0, 0)$ do $|D_2| = -36 < 0$ nên f không đạt cực trị.
- Tại $B(18, 6)$ do $D_1 = f_{xx} = 2 > 0$ và $|D_2| = 12 \cdot 18 - 36 > 0$ nên f đạt cực tiểu địa phương.



 **Câu 4.** Cho hàm $z(x, y) = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- (A) hàm z đạt cực tiểu tại $M(0, 1)$.
- (B) Hàm z đạt cực đại tại $M(0, 1)$.
- (C) Hàm z có điểm dừng nhưng không có cực trị.
- (D) Hàm z không có điểm dừng.

Lời giải.

Ta tính các đạo hàm cấp một

$$\begin{cases} z_x = e^y + 3x^2 = 0 \\ z_y = xe^y + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Do phương trình đầu luôn dương nên hệ vô nghiệm hay hàm z không có điểm dừng.

✍ **Câu 5.** Cho hàm $f(x, y) = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- (A) hàm f đạt cực tiểu tại $M(0, 0)$.
- (B) Hàm f đạt cực đại tại $M(0, 0)$.
- (C) Hàm z có điểm dừng nhưng không có cực trị.
- (D) Hàm f không có điểm dừng.

Lời giải.

Ta tính các đạo hàm cấp một

$$\begin{cases} z_x = -6x = 0 \\ z_y = 2e^y - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $(x, y) = (0, 1)$. Vậy điểm dừng là $M(0, 1)$. Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$z_{xx} = -6, \quad z_{yy} = 2e^y, \quad z_{xy} = 0$$

Khi này ta có

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2e^y \end{vmatrix} = -12e^y < 0$$

Do $|D_2| < 0$ nên z không có cực trị. Hay z có điểm dừng nhưng không có cực trị.

✍ **Câu 6.** Xét hàm $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ và điểm $M(0, 1)$. Chọn kết luận đúng

- (A) Hàm f đạt cực tiểu tại M .
- (B) Hàm f đạt cực đại tại M .
- (C) M là điểm dừng nhưng không phải cực trị của hàm f .
- (D) M không phải là điểm dừng của hàm f .

Lời giải.

Ta tính các đạo hàm cấp hai

$$f_{xx} = -2y^2, \quad f_{yy} = 2x - 2x^2 - 6xy, \quad f_{xy} = 2y - 3y^2 - 4xy$$

Tại $M(0, 1)$ thì

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = -1$$

Khi này

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Vậy f không đạt cực trị tại M

✍ **Câu 7.** Vi phân toàn phần của hàm $f(x, y) = x^2 + 2^y$ là kết quả nào sau đây

- (A) $df = 2xdx$.
- (B) $df = 2xdx + 2^y \ln 2 dy$.
- (C) $df = 2xdx + y2^{y-1} dy$.
- (D) $df = 2xdx + y2^y \ln 2 dy$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} df &= dx^2 + d2^y \\ &= 2xdx + 2^y \ln 2dy \end{aligned}$$



✍ **Câu 8.** Hàm chi phí $C(q) = 3q^2 + 75q - 36q \ln q + 135$ với q là mức sản lượng.

① Tính chi phí biên.

② Tìm q để chi phí trung bình $\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

③ So sánh giá trị của chi phí biên và giá trị của chi phí trung bình khi $\overline{C}(q)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

① Chi phí biên là

$$\begin{aligned} MC(q) &= 6q + 75 - 36 \ln q - 36 \\ &= 6q - 36 \ln q + 39 \end{aligned}$$

② Ta có chi phí trung bình là

$$\overline{C}(q) = 3q + 75 - 36 \ln q + \frac{135}{q}$$

Tính đạo hàm ta có $\overline{C}'(q) = 3 - \frac{36}{q} - \frac{135}{q^2}$, cho $\overline{C}'(q) = 0$ ta giải được $\begin{cases} q = -3 \\ q = 15 \end{cases}$. Do $q > 0$ nên $q = 15$ thì chi phí trung bình $\overline{C}(q)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

③ Tại $q = 15$ ta có giá trị chi phí biên và chi phí trung bình lần lượt là

$$MC = 129 - 36 \ln 15, \quad \overline{C} = 129 - 36 \ln 15$$

Do đó $MC = \overline{C}$.



✍ **Câu 9.** Giả sử hàm lợi nhuận của một xí nghiệp đối với sản phẩm là

$$\pi = R - C - T = P \cdot Q - (cQ + tQ + f)$$

trong đó $P = 12 - 3Q$ là đơn giá bán, $c = 4$ là chi phí trên một đơn vị sản phẩm, $f = 1$ là định phí độc lập với sản lượng Q . Hãy tìm sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa và định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để thu được của xí nghiệp nhiều thuế nhất

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \pi &= (12 - 3Q) \cdot Q - (4Q + tQ + 1) \\ &= -3Q^2 + Q(8 - t) - 1 \end{aligned}$$

Ta tính đạo hàm cấp một

$$\pi' = -6Q + 8 - t = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{8 - t}{6}$$

Ta tính đạo hàm cấp hai

$$\pi'' = -6 < 0$$

Vậy hàm π lõm ngặt toàn cục nên đạt cực đại toàn cục khi

$$Q = \frac{8-t}{6}$$

Khi này ta có $T = \frac{8t-t^2}{6}$ lớn nhất khi, ta tính đạo hàm cấp một

$$T' = \frac{4}{3} - \frac{t}{3}$$

Ta tính đạo hàm cấp hai

$$T'' = \frac{-1}{3} < 0$$

Vậy hàm T lõm ngặt toàn cục nên cực đại toàn cục khi $t = 4$. Thay vào hàm Q ta được $Q = \frac{2}{3}$. Hay $q = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. 

 **Câu 10.** Một hãng có hàm lợi nhuận là

$$\pi = P \cdot Q(L) - C(L)$$

với P là đơn giá bán, $Q(L) = 100\sqrt{L}$ là hàm sản xuất và $C(L) = 2500L + 1000$ là hàm chi phí, và L là lượng lao động

- ① Khi $P = 200$, hãy tìm L để hãng này có lợi nhuận tối đa
- ② Khi L tăng thêm 1% thì mức sản lượng của hãng tăng (hay giảm) bao nhiêu phần trăm ?

Lời giải.

- ① Ta có

$$\pi = P \cdot 100\sqrt{L} - 2500L - 1000$$

Khi $P = 200$, lúc này phương trình trên thành

$$\begin{aligned}\pi &= -10(25L - 200\sqrt{L} + 10) \\ &= -10(5\sqrt{L} - 20)^2 + 3900\end{aligned}$$

Vậy với $5\sqrt{L} = 20$ thì π là tối đa, hay $L = 16$.

- ② Ta tính độ co giãn của hàm sản xuất

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} \\ &= \frac{50}{\sqrt{L}} \frac{L}{100\sqrt{L}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy khi L tăng thêm 1% thì $Q(L)$ tăng thêm 0.5%. 

 **Câu 11.** Một công ty sản xuất độc quyền. Cho biết hệ số co giãn cầu theo giá là -2 và chi phí biên của công ty là 20 (đơn vị tiền) trên mỗi đơn vị sản phẩm.

- ① Tìm mức đơn giá P để công ty này có lợi nhuận tối đa.
- ② Khi MC tăng 10% thì mức đơn giá này sẽ tăng hay giảm bao nhiêu phần trăm ?
- ③ Hãy tính chỉ số $Lerner$ của công ty này.

Lời giải.

- ① Ta có:

$$TR = P(Q) \cdot Q \Rightarrow MR = TR' = P(Q) + \frac{dP}{dQ} \cdot Q$$

Mà $\varepsilon = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$ thay vào phương trình trên ta được

$$MR = P(Q) + \frac{P(Q)}{\varepsilon} = P \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Do $\pi = TR - TC \Rightarrow \pi' = MR - MC$ vậy π'_{max} khi $MR = MC$, thay vào phương trình trên ta được

$$P = \frac{MC}{1 + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{20}{1 + \frac{1}{-2}} = 40$$

- ② Do P và MC tỉ lệ thuận nên khi MC tăng 10% thì ε cũng tăng 10%.

- ③ Ta có công thức

$$L = \frac{P - MC}{P} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

Do $\varepsilon = -2$ nên $L = 0.5$.



 **Câu 12.** Hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C = P \cdot Q - (wL + rK)$$

trong đó R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động, $w = 1$ là tiền lương của một lao động, K là tiền vốn, $r = 0.03$ là lãi suất của tiền vốn, $P = 9$ là đơn giá bán và Q là hàm sản xuất *Cobb – Douglas*: $Q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$. Hãy tìm L, K sao cho công ty đạt lợi nhuận tối đa.

Lời giải.

Từ đề bài ta có phương trình

$$\pi = 9L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} - (L + 0.03K)$$

Ta tính đạo hàm cấp một

$$\begin{cases} \pi_L = 3K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} - 1 \\ \pi_K = 3K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - 0.03 \end{cases}$$

Khi này ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{K}{L^2}} = \frac{1}{3} \\ \sqrt[3]{\frac{L}{K^2}} = 0.01 \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{100}{3}$$

vậy $L = 900, K = 30000$, hay điểm dừng là $M(900, 30000)$. Ta tính đạo hàm cấp hai

$$\pi_{LL} = -2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}}, \quad \pi_{KK} = -2K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{1}{3}}, \quad \pi_{LK} = L^{-\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}$$

Ta có ma trận

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}} & L^{-\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} \\ L^{-\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} & -2K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = 3L^{-\frac{4}{3}}K^{-\frac{4}{3}} > 0$$

và $D_1 = -2K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{5}{3}} < 0$. Suy ra π đạt cực đại toàn cục tại $M(900, 30000)$.



 **Câu 13.** Giả sử hàm lợi ích đối với hai sản phẩm là:

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

trong đó x là lượng hàng thứ nhất, y là lượng hàng thứ hai. Giả sử người tiêu dùng có thu nhập 10 và sử dụng hết để mua hai sản phẩm này, với $P_1 = 3, P_2 = 2$. Tìm x và y để cực đại hóa $U(x, y)$.

Lời giải.

Khi này ta có hàm điều kiện là $3x + 2y = 10$. Ta lập hàm *lagrange*

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y + \lambda(10 - 3x - 2y)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{x} - 3\lambda \\ L_y = \frac{1}{y} - 2\lambda \\ L_\lambda = 10 - 3x - 2y \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, \lambda) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$. Hay điểm dừng là $M\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right)$

Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -3, \quad g_2 = -2, \quad L_{11} = -\frac{1}{x^2}, \quad L_{22} = -\frac{1}{y^2}, \quad L_{12} = 0$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{9}{y^2} + \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Do đó $|\overline{H}| > 0, \forall x, y > 0$. Vậy $x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{2}$ thì U đạt cực đại toàn cục.



✍ **Câu 14.** Giả sử hàm lợi ích phụ thuộc vào số tiền tiêu dùng trong hai thời kỳ 1 và thời kỳ 2 lần lượt là C_1 và C_2 như sau:

$$U(C_1, C_2) = C_1 C_2$$

Giả sử lãi suất sau thời kỳ thứ nhất là $r = 4\%$, tổng thu nhập trong thời kỳ thứ 1 là 10. Ràng buộc: $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = 10$ ($\frac{C_2}{1+r}$ là thời giá của C_2 ở thời kỳ thứ 1). Hãy tìm C_1, C_2 để cực đại hóa $U(C_1, C_2)$.

Lời giải.

Khi này ta có hàm điều kiện là $26C_1 + 25C_2 = 260$. Ta lập hàm *lagrange*

$$L(C_1, C_2, \lambda) = C_1 C_2 + \lambda (260 - 26C_1 - 25C_2)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_{C_1} = C_2 - 26\lambda \\ L_{C_2} = C_1 - 25\lambda \\ L_{\lambda} = 260 - 26C_1 - 25C_2 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} C_2 = 26\lambda \\ C_1 = 25\lambda \\ 26C_1 + 25C_2 = 260 \end{cases}$$

Ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, \lambda) = (5, 5.2, 0.2)$. Hay điểm dừng là $M(5, 5.2)$ Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -26, \quad g_2 = -25, \quad L_{11} = 0, \quad L_{22} = 0, \quad L_{12} = 1$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -26 & -25 \\ -26 & 0 & 1 \\ -25 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1300 \end{aligned}$$

Do đó $|\overline{H}| > 0$. Vậy $C_1 = 5, C_2 = 5.2$ thì U đạt cực đại toàn cục.



✍ **Câu 15.** Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm và tiêu thụ trên một thị trường. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên thị trường là:

$$Q_{D_1} = 800 - 2P_1 + P_2, \quad Q_{D_2} = 960 + P_1 - P_2$$

và hàm tổng chi phí là $C(Q_1, Q_2) = 320Q_1 + 250Q_2 + 300$ trong đó P_i, Q_i ($i = 1, 2$) lần lượt là đơn giá và mức sản lượng của mặt hàng thứ i .

- ① Tìm mức sản lượng của mỗi loại sản phẩm để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa
- ② Tìm mức sản lượng của mỗi loại sản phẩm để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa với điều kiện hạn chế về chi phí là $C = 166700$

Lời giải.

① Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} Q_1 = 800 - 2P_1 + P_2 \\ Q_2 = 960 + P_1 - P_2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được $P_1 = 1760 - Q_1 - Q_2$, thay vào hệ ta được

$$P_2 = 960 + P_1 - Q_2 = 2720 - Q_1 - 2Q_2$$

Ta có lợi nhuận bằng tổng tiền kiếm được trừ chi phí do đó

$$\begin{aligned} \pi &= TR_1 + TR_2 - C \\ &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1, Q_2) \\ &= 1440Q_1 + 2470Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 300 \end{aligned}$$

Ta tính đạo hàm cấp một

$$\begin{cases} \pi_{Q_1} = 1440 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ \pi_{Q_2} = 2470 - 4Q_2 - 2Q_1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có nghiệm $(Q_1, Q_2) = (205, 515)$. Ta tính đạo hàm cấp hai

$$\pi_{Q_1Q_1} = -2, \quad \pi_{Q_2Q_2} = -4, \quad \pi_{Q_1Q_2} = -2$$

Khi này ta có $D_1 = \pi_{Q_1Q_1} = -2 < 0$, và

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Do đó $Q_1 = 205, Q_2 = 515$ thì lợi nhuận tối đa.

② Ta lập hàm *lagrange*

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = 1440Q_1 + 2470Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 300 + \lambda(166400 - 320Q_1 - 250Q_2)$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_{Q_1} = 1440 - 2Q_1 - 2Q_2 - 320\lambda \\ L_{Q_2} = 2470 - 4Q_2 - 2Q_1 - 250\lambda \\ L_{\lambda} = 166400 - 320Q_1 - 250Q_2 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1440 - 2Q_1 - 2Q_2}{320} \\ \lambda = \frac{2470 - 4Q_2 - 2Q_1}{250} \\ 32Q_1 + 25Q_2 = 16640 \end{cases}$$

Khi này rút gọn ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 14Q_1 + 78Q_2 = 43040 \\ 32Q_1 + 25Q_2 = 16640 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $(Q_1, Q_2, \lambda) = \left(\frac{110960}{1073}, \frac{572160}{1073}, \frac{559}{1073}\right)$

Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -320, \quad g_2 = -250, \quad L_{11} = -2, \quad L_{22} = -4, \quad L_{12} = -2$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{pmatrix} 0 & -320 & -250 \\ -320 & -2 & -2 \\ -250 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= -32 \cdot 10^4 + 4 \cdot 320^2 + 2 \cdot 250^2 \end{aligned}$$

Do đó $|\overline{H}| > 0$. Vậy $(Q_1, Q_2) = \left(\frac{110960}{1073}, \frac{572160}{1073}\right)$ thì lợi nhuận tối đa.



✍️ **Câu 16.** Cho hàm chi phí: $C(L, K) = wL + rK$ trong đó $w = 8, r = 0,02$. Hàm sản xuất là hàm Cobb–Douglas có dạng:

$$Q(L, K) = L^{1/2} K^{1/2}$$

Tìm L và K để hàm $C(L, K)$ đạt cực tiểu (tối thiểu hóa chi phí) thỏa mãn điều kiện $Q = 100$.

Lời giải.

Ta lập hàm *Lagrange*

$$L(L, K, \lambda) = 8L + 0,02K + \lambda(100 - \sqrt{LK})$$

Điều kiện cần

$$\begin{cases} L_L = 8 - \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \\ L_K = 0,02 - \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} \\ \sqrt{LK} = 100 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $(L, K, \lambda) = \left(5, 2000, \frac{4}{5}\right)$

Điều kiện đủ. Ta tính các đạo hàm bậc hai

$$g_1 = -\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}, \quad g_2 = -\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}, \quad L_{11} = \frac{\lambda\sqrt{K}}{4\sqrt{L}^3}, \quad L_{22} = \frac{\lambda\sqrt{L}}{4\sqrt{K}^3}, \quad L_{12} = \frac{-\lambda}{4\sqrt{LK}}$$

Vậy

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} & -\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \\ -\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} & \frac{\lambda\sqrt{K}}{4\sqrt{L}^3} & -\lambda \\ -\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} & -\lambda & \frac{\lambda\sqrt{L}}{4\sqrt{K}^3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\lambda}{4\sqrt{LK}} \end{aligned}$$

Do đó $|\overline{H}| < 0, \quad \forall \lambda, L, K > 0$. Vậy $L = 5, K = 2000$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



5 BÀI TẬP CHƯƠNG 6

✍ **Câu 1.** Giải phương trình sau đây

$$y' \cos^2 x + y = \tan x$$

Lời giải.

Phương trình ban đầu tương đương với

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

Ta có

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

Nhân hai vế của phương trình trên với $e^{\tan x}$ ta có

$$(e^{\tan x} y)' = \frac{\tan x \cdot e^{\tan x}}{\cos^2 x} \Rightarrow y \cdot e^{\tan x} = \int \frac{\tan x \cdot e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

Mà ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan x \cdot e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx &= \int \tan x \cdot e^{\tan x} d \tan x \\ &= \int \tan x de^{\tan x} \\ &= \tan x e^{\tan x} - \int e^{\tan x} d \tan x \\ &= \tan x e^{\tan x} - e^{\tan x} + C \end{aligned}$$

Nên ta có

$$y = \frac{\tan x e^{\tan x} - e^{\tan x} + C}{\tan x}$$



✍ **Câu 2.** Giải phương trình sau đây

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

thỏa mãn $f(\pi) = 1$.

Lời giải.

Phương trình ban đầu tương đương

$$xy' + y = x \sin x \Leftrightarrow (xy)' = x \sin x$$



Mà ta có

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) \\ &= -x \cos x - \int -\cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Do đó $y = -\cos x + \frac{\sin x + C}{x}$, mà $f(\pi) = 1$ nên $C = 0$ hay

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x}$$

 **Câu 3.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$$

Lời giải.

Phương trình ban đầu tương đương

$$y'x + y = e^x \Leftrightarrow (xy)' = e^x$$

Hay $y = \frac{e^x + C}{x}$

 **Câu 4.** Cho phương trình vi phân $y'' - 5y' + 4y = (6x - 5)e^x$

- ① Tìm nghiệm tổng quát của phương trình
- ② Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa $y(0) = 1$ và $y'(0) = -2$

Lời giải.

- ① Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)(k - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 4 \end{cases}.$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

Ta có: $\alpha = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = x e^x (ax + b)$$

Ta sẽ có hệ sau

$$\begin{cases} y_*' = (2ax + b)e^x + e^x(ax^2 + bx) = e^x [ax^2 + (2a + b)x + b] \\ y_*'' = e^x [ax^2 + x(4a + b) + 2a + 2b] \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$e^x (-6ax + 2a - 3b) = e^x (6x - 5)$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = -1, b = 1$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + x e^x (1 - x)$$

② Do $y(0) = 1$ và $y'(0) = -2$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = -3 \end{cases}$$

suy ra $C_2 = -\frac{4}{3}$, $C_1 = \frac{7}{3}$ vậy nghiệm lúc này là

$$y(x) = \frac{7}{3}e^x - \frac{4}{3}e^{4x} + xe^x(1-x)$$



✍ **Câu 5.** Nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 4y' + 4y = 2^x(3x - 1)$$

có dạng là ?

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$y'' - 4y' + 4y = e^{x \ln 2}(3x - 1)$$

Ta giải phương trình đặc trưng ra $k = 2$, do $\ln 2$ không phải là nghiệm. Nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = e^{x \ln 2}(ax + b) = 2^x(ax + b)$$



✍ **Câu 6.** Nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(3x + 1)$$

có dạng là ?

Lời giải.

Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow (k - 2)(k - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 3 \end{cases}.$$

Do 2 là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = xe^{2x}(ax + b) = e^{2x}(ax^2 + b)$$



✍ **Câu 7.** Cho phương trình vi phân $y'' + 4y = \sin 3x - 2 \cos 3x$

① Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

② Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa $y(0) = 1$ và $y'(0) = 0$

Lời giải.

① Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2i \\ k = -2i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

Do $\pm 3i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = C_3 \sin 3x + C_4 \cos 3x$$

Ta tính đạo hàm cấp hai của nghiệm riêng

$$y_*'' = -9C_3 \sin 3x - 9C_4 \cos 3x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-5C_3 \sin 3x - 5C_4 \cos 3x = \sin 3x - 2 \cos 3x$$

Đồng nhất hệ số ta có $C_3 = -\frac{1}{5}, C_4 = \frac{2}{5}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 3x + \frac{2}{5} \cos 3x$$

② Do $y(0) = 1$ và $y'(0) = 0$ ta có

$$\begin{cases} C_2 + \frac{2}{5} = 1 \\ 2C_1 - \frac{3}{5} = 0 \end{cases}$$

Nên ta có $C_2 = \frac{3}{5}, C_1 = \frac{3}{10}$. Vậy nghiệm riêng của phương trình là

$$y(x) = \frac{3}{10} \sin 2x + \frac{3}{5} \cos 2x - \frac{1}{5} \sin 3x + \frac{2}{5} \cos 3x$$



✍️ **Câu 8.** giải các phương trình vi phân sau đây

① $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$

② $y'' - y = 3e^x$

③ $y'' - 2y' - 3y = -2xe^{-x}$

④ $y'' + y' - 2y = xe^x$

⑤ $y'' - y' - 2y = e^{2x}$

⑥ $y'' - 2y' + 2y = x^2$

⑦ $y'' - y' - 2y = e^{2x}$

⑧ $y'' - 4y' = \sin x$

⑨ $y'' + y = 3 \sin x$

⑩ $y'' = 1 - 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)$

⑪ $y'' - 2y = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1$

Lời giải.

① Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)(k - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

Ta có: $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = C e^{2x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$e^{2x}(4C - 8C + 3C) = e^{2x}$$

Đồng nhất hệ số ta được $C = -1$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$$

② Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)(k + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ta có: $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = C x e^x$$

Ta có nghiệm riêng đạo hàm cấp hai là $y''_* = 2C e^x + C x e^x$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2C e^x = 3e^x$$

Đồng nhất hệ số ta được $C = \frac{3}{2}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{3}{2} x e^x$$

③ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow (k - 3)(k + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Ta có: $\alpha = -1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = (ax^2 + bx)e^{-x}$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ y''_* = (ax^2 + (b - 4a)x - 2b + 2a)e^{-x} \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(-8ax - 4b + 2a)e^{-x} = -2xe^{-x}$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{8}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\right)e^{-x}$$

④ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow (k + 2)(k - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Ta có: $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = (ax^2 + bx)e^x$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = (ax^2 + (b + 2a)x + b)e^x \\ y''_* = (ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a)e^x \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(6ax + 3b + 2a)e^x = xe^x$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{9}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}\right)e^x$$

⑤ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Ta có: $\alpha = 2$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = Cx e^{2x}$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = (2Cx + C) e^{2x} \\ y''_* = (4Cx^2 + 4C) e^{2x} \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$3C e^{2x} = e^{2x}$$

Đồng nhất hệ số ta được $C = \frac{1}{3}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{2x}$$

⑥ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + i \\ k = 1 - i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

Ta có: $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y^* = ax^2 + bx + c$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = 2ax + b \\ y''_* = 2a \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2ax^2 + (2b - 4a)x + 2c - 2b + 2a = x^2$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{2}$$

⑦ Tương tự bài 5

⑧ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 4 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{4x}$$

Ta có: $\pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = a \sin x + b \cos x$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = a \cos x - b \sin x \\ y''_* = -a \sin x - b \cos x \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(4b - a) \sin x - (4a + b) \cos x = \sin x$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = \frac{-1}{17}, b = \frac{4}{17}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{17} \sin x + \frac{4}{17} \cos x$$

⑨ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Ta có: $\pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = x(a \sin x + b \cos x)$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$y''_* = (-ax - 2b) \sin x + (2a - bx) \cos x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2a \cos x - 2b \sin nx = 3 \sin x$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 0, b = \frac{-3}{2}$ vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{3x}{2} \cos x$$

- ⑩ Ta có: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ suy ra phương trình tương đương

$$y'' = -\cos x \Rightarrow y' = C_1 - \sin x \Rightarrow y = C_1x + \cos x + C_2$$

- ⑪ Ta có: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ suy ra phương trình tương đương

$$y'' - 2y = -\cos x$$

Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \sqrt{2} \\ k = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{\sqrt{2}} + C_2 e^{-\sqrt{2}}$$

Ta có: $\pm i$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = a \sin x + b \cos x$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_* = a \cos x - b \sin x \\ y''_* = -a \sin x - b \cos x \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-3a \sin x - 3b \cos x = -\cos x$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 0, b = \frac{1}{3}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}} + C_2 e^{-\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cos x$$



✍ **Câu 9.** giải các phương trình vi phân sau đây

① $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2x$

② $y'' + 2y' = 3x - e^{-2x}$

③ $y'' + 3y' + 2y = 4 + 2x + e^{-x}$

④ $y'' + y' - 2y = x^2 + 3e^{-x}$

⑤ $y'' - y' - 2y = x^2 + e^{-x}$

⑥ $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

Lời giải.

① Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của e^x , do $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = C x e^x$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_{1*} = (Cx + C)e^x \\ y''_{1*} = (Cx + 2C)e^x \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-C e^x = e^x$$

Đồng nhất hệ số ta có $C = -1$. Ta xác định nghiệm riêng của $2x$, do $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = ax + b$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2ax + 2b - 3a = 2x$$

. Đồng nhất hệ số ta có $a = 1, b = \frac{3}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_2 e^{2x} - (x + C_1) e^x + x + \frac{3}{2}$$

② Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của $3x$, do $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = ax^2 + bx$$

Ta tính các đạo hàm của nghiệm riêng

$$\begin{cases} y'_{1*} = 2ax \\ y''_{1*} = 2a \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$4ax + 2b + 2a = 3x$$

Đồng nhất hệ số ta có $a = \frac{3}{4}, b = \frac{-3}{4}$. Ta xác định nghiệm riêng của $-e^{2x}$, do $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = Ce^{2x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$8Ce^{2x} = -e^{2x}$$

Đồng nhất hệ số ta có $c = -\frac{1}{8}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

③ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của $2x + 4$, do $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = ax + b$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2ax + 2b + 3a = 2x + 4$$

Đồng nhất hệ số ta có $a = 1, b = \frac{1}{2}$. Ta xác định nghiệm riêng của $-e^{-x}$, do $\alpha = -1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = Cxe^{-x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$Ce^{-x} = e^{-x}$$

Đồng nhất hệ số ta có $C = 1$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + xe^{-x} + x + \frac{1}{2}$$

④ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow (k + 2)(k - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Ta xác định nghiệm riêng của x^2 , do $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = ax^2 + bx + c$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-2ax^2 + (2a - 2b)x - 2c + b + 2a = x^2$$

đồng nhất hệ số ta có $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{4}$. Ta xác định nghiệm riêng của $3e^{-x}$, do $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = Ce^{-x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-2Ce^{-x} = 3e^{-x}$$

đồng nhất hệ số ta có $C = -\frac{3}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

⑤ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow (k + 2)(k - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Ta xác định nghiệm riêng của x^2 , do $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = ax^2 + bx + c$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-2ax^2 + (2a - 2b)x - 2c + b + 2a = x^2$$

đồng nhất hệ số ta có $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{4}$. Ta xác định nghiệm riêng của e^{-x} , do $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = Ce^{-x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-2Ce^{-x} = e^{-x}$$

đồng nhất hệ số ta có $C = -\frac{1}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

⑥ Ta có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Ta xác định nghiệm riêng của xe^x , do $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = (ax + b)e^x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2ax e^x + (2b + 2a) e^x = x e^x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. Ta xác định nghiệm riêng của $2e^{-x}$, do $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C e^{-x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$2C e^{-x} = 2e^{-x}$$

đồng nhất hệ số ta có $C = 1$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) e^x + e^{-x}$$



✍️ **Câu 10.** Giải các phương trình vi phân sau đây

① $y'' - y = 2 \cos^2 x$

② $y'' - y = -2 \sin^2 x$

③ $y'' - 4y' + 8y = 2 \sin^2 x$

④ $y'' - 4y' + 8y = -2 \cos^2 x$

⑤ $y'' - 2y' - 3y = e^{2x} + \cos x$

⑥ $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

Lời giải.

① Phương trình tương đương với

$$y'' - y = \cos 2x + 1$$

Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của $\cos 2x$, do $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Ta tính đạo hàm cấp hai

$$y_{1*}'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-5a \sin 2x - 5b \cos 2x = \cos 2x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = 0, b = -\frac{1}{5}$ Ta xác định nghiệm riêng của 1, do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $C = -1$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = -\frac{\cos(2x)}{5} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$

② Phương trình tương đương với

$$y'' - y = \cos 2x - 1$$

Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của $\cos 2x$, do $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Ta tính đạo hàm cấp hai

$$y_{1*}'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-5a \sin 2x - 5b \cos 2x = \cos 2x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = 0, b = -\frac{1}{5}$ Ta xác định nghiệm riêng của -1 , do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $C = 1$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = -\frac{\cos(2x)}{5} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 1$$

③ Phương trình tương đương với

$$y'' - 4y' + 8y = -\cos 2x + 1$$

Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 2i \\ k = 2 - 2i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = e^{2x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

Ta xác định nghiệm riêng của $-\cos 2x$, do $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(4a + 8b) \sin 2x + (4b - 8a) \cos 2x = -\cos 2x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{1}{20}$ Ta xác định nghiệm riêng của 1, do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $C = \frac{1}{8}$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = e^{2x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + \frac{\sin 2x}{10} - \frac{\cos 2x}{20} + \frac{1}{8}$$

④ Phương trình tương đương với

$$y'' - 4y' + 8y = -\cos 2x - 1$$

Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 2i \\ k = 2 - 2i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = e^{2x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

Ta xác định nghiệm riêng của $-\cos 2x$, do $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(4a + 8b) \sin 2x + (4b - 8a) \cos 2x = -\cos 2x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{1}{20}$ Ta xác định nghiệm riêng của -1 , do 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $C = \frac{-1}{8}$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = e^{2x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + \frac{\sin 2x}{10} - \frac{\cos 2x}{20} + \frac{-1}{8}$$

⑤ Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Ta xác định nghiệm riêng của e^{2x} , do 2 không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = C e^{2x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$-3C e^{2x} = e^{2x}$$

đồng nhất hệ số ta có $C = -\frac{1}{3}$ Ta xác định nghiệm riêng của $\cos x$, do $\pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = a \sin x + b \cos x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(2b - 4a) \sin x + (-2a - 4b) \cos x = \cos x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = -\frac{1}{10}, b = -\frac{1}{5}$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{\sin(x)}{10} - \frac{\cos(x)}{5}$$

⑥ Ta giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 2i \\ k = 2 - 2i \end{cases}$$

Nên ta có nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là

$$y_0 = e^{2x} (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

Ta xác định nghiệm riêng của $\sin 2x$, do $\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{1*} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$(4a + 8b) \sin 2x + (4b - 8a) \cos 2x = \sin 2x$$

đồng nhất hệ số ta có $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{10}$ Ta xác định nghiệm riêng của e^{2x} , do 2 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_{2*} = C e^{2x}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $C = \frac{1}{4}$, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = e^{2x} (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + \frac{\sin 2x}{20} + \frac{\cos 2x}{10} + \frac{e^{2x}}{4}$$

🔗 **Câu 11.** Xét phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$. Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây:

(A) $u(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$.

(B) $u(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$.

(C) $u(x) = e^{2x}x^2(ax^2 + bx + c)$.

(D) $u(x) = e^{2x}(ax + b)$.

Lời giải.

Do 2 là nghiệm kép của hàm đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = x^2(ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

🔗 **Câu 12.** Xét phương trình vi phân $y'' + y' - 2y = e^x(2x + 1)$. Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây:

(A) $u(x) = e^x(ax + b)$.

(B) $u(x) = e^x(ax^2 + bx)$.

(C) $u(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$.

(D) $u(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$.

Lời giải.

Do 1 là nghiệm đơn của hàm đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = x(ax + b)e^x$$

🔗 **Câu 13.** Xét phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$. Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây:

(A) $u(x) = e^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$.

(B) $u(x) = axe^x \sin 2x$.

(C) $u(x) = e^x x(a \cos 2x + b \sin 2x)$.

(D) $u(x) = e^x(ax + b) \sin 2x$.

Lời giải.

Do $1 + 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = xe^x(a \sin 2x + b \cos 2x)$$

🔗 **Câu 14.** Xét phương trình vi phân $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$. Một nghiệm riêng của (1) có dạng:

(A) $u(x) = x[a \cos x + b \sin x]$.

(B) $u(x) = xe^{2x}[a \cos x + b \sin x]$.

(C) $u(x) = e^{2x}[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$.

(D) $u(x) = x[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$.

Lời giải.

Do $2 + i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$$y_* = xe^{2x}(a \sin 2x + b \cos 2x)$$