

Nội dung chương trình học phần Toán dành cho Kinh tế và Quản trị:

1. Ma trận
2. Hệ phương trình tuyến tính
3. Định thức
4. Giới hạn và liên tục của hàm một biến
5. Phép tính vi phân và cực trị của hàm một biến
6. Phép tính tích phân của hàm một biến
7. Phương trình vi phân
8. Đạo hàm riêng và cực trị của hàm nhiều biến

Tài liệu tham khảo:

1. *Bài tập Toán Cao Cấp* (dành cho khối ngành Kinh tế và Quản trị), Nhóm tác giả, Đại học Kinh tế TP Hồ Chí Minh, 2023.
2. *Nhập môn Giải tích Toán học* (dành cho Thương mại, Kinh tế, Khoa học Đời sống và Khoa học Xã hội), Nhóm dịch giả, NXB Kinh tế TP Hồ Chí Minh, 2017.

Tiêu chuẩn đánh giá sinh viên:

1. Thi giữa học phần: chiếm **30%** số điểm tổng kết môn học, thi vào buổi học thứ tám tại lớp trong thời gian 60 phút, hình thức **tự luận** gồm 4 câu, **được dùng tài liệu tham khảo**.
2. Thi kết thúc học phần: chiếm **70%** số điểm tổng kết môn học, thi (offline) trong thời gian 75 phút, hình thức **trắc nghiệm + tự luận** gồm 10 câu trắc nghiệm (5 điểm) và 3 bài tập tự luận (5 điểm), **không dùng tài liệu tham khảo**.

Điện thoại: 0903382994

E-mail: tuannnd@ueh.edu.vn

I. Ma trận

1. Các khái niệm.

- Một **ma trận** thực A cấp $m \times n$ là một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số được viết thành m dòng, mỗi dòng có n phần tử (số) như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là **phần tử** của ma trận A ở vị trí dòng i và cột j (với $i = 1, 2, \dots, m$ và $j = 1, 2, \dots, n$). Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay ngắn gọn $A = (a_{ij})$.

Ví dụ 1.1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2×3 có $a_{11} = 1, a_{12} = 3, \dots, a_{23} = 7$.

- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi i và j , thì A đc gọi là **ma trận không** cấp $m \times n$, ký hiệu $A = 0_{m \times n}$.

Ví dụ 1.2: $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận không cấp 2×3 .

- Nếu $m = n$, thì A được gọi là **ma trận vuông** cấp n .
- Nếu A là ma trận vuông cấp n thì đường thẳng chứa $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là **đường chéo chính** của A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Xét $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n .

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$ (các ptử ở phía dưới đch chính đều = 0) thì A là **ma trận tam giác trên**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i < j$ (các phần tử ở phía trên đường chéo chính đều = 0) thì A là **ma trận tam giác dưới**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nếu $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ (các phần tử ngoài đường chéo chính đều = 0) thì A được gọi là **ma trận đường chéo**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• Ma trận đường chéo cấp n với tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là **ma trận đơn vị cấp n**:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 1.3: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 2,

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

- **Ma trận bằng nhau.** Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$ (cùng cấp). Khi đó:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Ví dụ 1.4: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & a \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} b & c \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Khi đó, $A = B \Leftrightarrow b = 1, c = -2$ và $a = 4$.

2. Các phép toán trên ma trận.

2.1 Ma trận chuyển vị.

- Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Khi đó **ma trận chuyển vị** của A, ký hiệu A^T , là ma trận xác định bởi:

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

(với $i = 1, 2, \dots, m$, dòng thứ i của ma trận A là cột thứ i của ma trận A^T và ngược lại).

Ví dụ 1.5: Với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

- **Tính chất:** Cho A và B là các mtr cấp $m \times n$. Khi đó:

$$1. (A^T)^T = A,$$

$$2. A^T = B^T \Leftrightarrow A = B.$$

2.2 Phép nhân một số với ma trận.

- Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và số thực α . **Tích** của α với A, ký hiệu αA , là ma trận xác định bởi:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}.$$

Nếu $\alpha = -1$ thì $(-1)A = -A$ được gọi là **ma trận đối** của A.

Ví dụ 1.6: Với $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ thì

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 4 & -14 & 10 \end{pmatrix}, -3A = \begin{pmatrix} -12 & -9 & -3 \\ -6 & 21 & -15 \end{pmatrix} \text{ và } -A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* Cho A là mtr cấp $m \times n$ và α, β là các số thực. Khi đó:

$$1. (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$$

$$2. (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

2.3 Phép cộng (trừ) ma trận.

• Cho các ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$. **Tổng** của A và B , ký hiệu $A + B$, là ma trận xác định bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Hiệu của A và B :

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

Ví dụ 1.7: Với $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ thì

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -1 & -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* Cho A, B, C là các mtr cấp $m \times n$ và α, β là các số thực. Khi đó:

1. $A + B = B + A$ (giao hoán),
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (kết hợp),
3. $0_{m \times n} + A = A + 0_{m \times n} = A$,
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$,
5. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$,
6. $1.A = A$,
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

2.4 Tích ma trận.

- Cho các ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{n \times p}$ (số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B (bằng n)). **Tích** của A và B, ký hiệu $AB = (c_{ij})_{m \times p}$, là ma trận cấp $m \times p$ xác định bởi:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \forall i, j$$

(tích vô hướng của dòng i trong ma trận A và cột j trong ma trận B).

Ví dụ 1.8: Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Khi đó:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 + 3.(-3) + 1.4 & 5.(-4) + 3.7 + 1.(-6) \\ 7.2 + 6.(-3) + 8.4 & 7.(-4) + 6.7 + 8.(-6) \\ 3.2 + 2.(-3) + 2.4 & 3.(-4) + 2.7 + 2.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 28 & -34 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tuy nhiên, tích BA không tồn tại (vì số cột của B khác số dòng của A).

- **Lưu ý:** + Nếu tích AB tồn tại thì chưa chắc tích BA tồn tại.
+ Khi A và B là các ma trận vuông cấp n thì các tích AB và BA tồn tại nhưng nói chung ta có $AB \neq BA$.
+ Có thể xảy ra trường hợp $A \neq 0$ và $B \neq 0$ nhưng $AB = 0$.

Ví dụ 1.9: Với $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$ thì $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$.

- **Tính chất:** Cho các ma trận A, A' cấp $m \times n$; B, B' cấp $n \times p$; C cấp $p \times q$ và α là số thực.

Khi đó:

1. $(AB)C = A(BC)$ (kết hợp),
2. $A.0_{n \times p} = 0_{m \times p}$, $0_{r \times m}A = 0_{r \times n}$,
3. $AI_n = A$, $I_m A = A$,
4. $A(B \pm B') = AB \pm AB'$,
5. $(A \pm A')B = AB \pm A'B$,
6. $(AB)^T = B^T A^T$,

7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$

2.5 Lũy thừa ma trận.

• Cho A là ma trận vuông cấp n và k là số tự nhiên. **Lũy thừa** bậc k của A , ký hiệu A^k , là ma trận vuông cấp n được xác định bởi:

$$A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A.A, \dots, A^k = A^{k-1}.A.$$

Ví dụ 1.10: Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ta có:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A,$$

$$A^4 = A^3.A = A.A = I_2,$$

$$A^5 = A^4.A = I_2.A = A, \dots$$

Vậy $A^{2n} = I_2$ và $A^{2n+1} = A$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Ta có thể viết kết quả bằng cách khác:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

• **Tính chất:** Cho A là mtr vuông cấp n và k, l là các số tự nhiên. Khi đó:

1. $I_n^k = I_n, 0_{n \times n}^k = 0_{n \times n} (k \neq 0),$

2. $A^{k+l} = A^k.A^l,$

3. $A^{kl} = (A^k)^l.$

Bài tập 1.1: Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Tính $A + A^T$, $A - A^T$, $A.A^T$, $A^T.A$, A^2 và A^3 .
2. Tìm mtr X sao cho $3X + 2A^T = I_3$.
3. Tìm mtr Y sao cho $2Y^T - 3A^T = I_3$.

1. Ta tính được:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3},$$

$$A^4 = A^5 = \dots = 0_{3 \times 3}.$$

2. Ta có:

$$3X + 2A^T = I_3$$

$$\Leftrightarrow 3X = I_3 - 2A^T$$

$$\Leftrightarrow X = (1/3).(I_3 - 2A^T)$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Ta có:

$$2Y^T - 3A^T = I_3$$

$$\Leftrightarrow 2Y^T = 3A^T + I_3$$

$$\Leftrightarrow Y^T = (1/2) \cdot (3A^T + I_3)$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2} \left[3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 1.2: Tính các lũy thừa: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, ta tính được:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A,$$

$$A^4 = A^3.A = A.A = I_2,$$

$$A^5 = A^4.A = I_2.A = A, \dots$$

Vậy $A^{2n} = I_2$ và $A^{2n+1} = A$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

3. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận.

3.1 Định nghĩa các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

• Cho A là ma trận cấp $m \times n$. Có ba **phép biến đổi sơ cấp trên dòng** biến ma trận A thành ma trận A' cấp $m \times n$ như sau.

(1) Hoán vị dòng i và dòng j của A với nhau:

$$A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'.$$

(2) Thay dòng i của A bằng α lần dòng i của A ($\alpha \neq 0$):

$$A \xrightarrow{\alpha d_i} A'.$$

(3) Thay dòng i của A bằng dòng i cộng α lần dòng j của A ($\alpha \in \mathbb{R}, i \neq j$):

$$A \xrightarrow{d_i + \alpha d_j} A'.$$

Ví dụ 1.11: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} A' = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2d_2} A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & -14 & -12 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 + 2d_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 12 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_3 - 5d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 21 & -21 \end{pmatrix}.$$

• *Tính chất:* (1) Nếu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$.

(2) Nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $A' \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} d_i} A$.

(3) Nếu $A \xrightarrow{d_i + \alpha d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i - \alpha d_j} A$.

• *Lưu ý:* Ta cũng có ba **phép biến đổi sơ cấp trên cột** của ma trận và các tính chất tương tự như trên.

3.2 Ma trận bậc thang.

• **Ma trận bậc thang** là ma trận có hai tính chất sau:

+ các dòng khác không nằm trên các dòng không (nếu có),

+ trên hai dòng khác không (nếu có) bất kỳ, phần tử khác 0 đầu tiên ở dòng dưới nằm bên phải phần tử khác 0 đầu tiên ở dòng trên.

Ví dụ 1.12: Các ma trận sau đây là các ma trận bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận sau đây không phải là các ma trận bậc thang:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Hạng của ma trận.

• Cho A là ma trận tùy ý.

+ Nếu A là ma trận bậc thang thì **hạng** của A, ký hiệu **r(A)** (hay **R(A)**), là số dòng khác không của A.

+ Nếu A không phải là ma trận bậc thang thì ta biến đổi A thành ma trận bậc thang B. Khi đó, hạng của A là $r(A) = r(B)$.

Ví dụ 1.13: Trong ví dụ 1.12 trên, ta có: $r(A) = 3$, $r(B) = 2$ và $r(C) = 1$. Hơn nữa:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D' \Rightarrow r(D) = r(D') = 2.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E' \Rightarrow r(E) = r(E') = 2.$$

• *Tính chất:* Cho A và B là các mtr cấp $m \times n$. Khi đó:

1. $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$,
2. $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_{m \times n}$,
3. $r(A^T) = r(A)$,
4. nếu B nhận được từ A qua một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thì $r(A) = r(B)$.

3.4 Thuật toán Gauss để biến đổi ma trận cho trước thành ma trận bậc thang.

Ví dụ 1.14: 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 33 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$

Ta biến đổi:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-3d_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó, $r(A) = 2.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2+d_1 \\ d_3-3d_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Do đó, $r(A) = 3.$

Bài tập 1.3: Biến đổi ma trận A sau đây thành ma trận bậc thang rồi suy ra hạng $r(A)$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2-2d_1 \\ d_3+d_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{5d_3+4d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Do đó, $r(A) = 3.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2-3d_1 \\ d_3-d_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Do đó, $r(A) = 3$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3+2d_1 \\ d_4-d_1}]{\substack{d_3+2d_1 \\ d_4-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3-2d_2 \\ d_4-d_2}]{\substack{d_3-2d_2 \\ d_4-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{2d_4+d_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Do đó, $r(A) = 3$.

$$\begin{aligned}
 4. \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2d_3-d_1 \\ d_4-d_3}]{\substack{2d_3-d_1 \\ d_4-d_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2d_3-5d_2 \\ d_4+d_2}]{\substack{2d_3-5d_2 \\ d_4+d_2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{5d_4+d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Do đó, $r(A) = 4$.

Bài tập 1.4: Tìm hạng của các ma trận sau theo tham số thực m :

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}, & 2. \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ m & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2-3d_1 \\ d_3-d_1}]{\substack{d_2-3d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & m-3 \end{pmatrix}.$$

Do đó: + với $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thì $r(A) = 2$,

+ với $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ thì $r(A) = 3$.

$$\begin{aligned}
2. \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ m & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{d_2+2d_1, d_3+d_2 \\ d_4+d_1}]{\substack{d_2+2d_1, d_3+d_2 \\ d_4+d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & m+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4d_3-5d_2 \\ 2d_4-d_2}]{\substack{4d_3-5d_2 \\ 2d_4-d_2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -15 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 2m \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{5d_4+d_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -15 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 10m-16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Do đó: + với $10m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 8/5$ thì $r(A) = 3$,

+ với $10m - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 8/5$ thì $r(A) = 4$.

Bài tập 1.5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$. Tìm m sao cho $r(A) = 3$? $r(A) = 2$? $r(A) = 1$?

Từ cách giải **Bài tập 1.4 câu 1** ở trên, ta kết luận:

+ với $m \neq 3$ thì $r(A) = 3$,

+ với $m = 3$ thì $r(A) = 2$,

+ không tồn tại m để $r(A) = 1$.

* **Bài tập** liên quan đến các phép toán trên ma trận và hạng của ma trận trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: các trang từ 42 đến 52.

- Hpt tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu biết ma trận mở rộng của hệ.

Ví dụ 2.1: Hệ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ là một hpt tuyến tính gồm 2 phương trình 3 ẩn. Ma trận mở rộng của hệ là:

$$\overline{A} = (A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Ta thấy rằng:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Do đó, hpt đã cho tương đương dạng ma trận: $AX = B$.

2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

- Ta nói bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là một **nghiệm** của hpt (I) nếu thay $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ vào (I) thì tất cả các đẳng thức đều thỏa.

Rõ ràng, hpt tuyến tính thuần nhất luôn có một **nghiệm tầm thường** là $(0, 0, \dots, 0)$.

- Hai hpt tuyến tính (có cùng số ẩn) được gọi là **tương đương** với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

- **Định lý:** Cho hai hpt tuyến tính có các ma trận mở rộng lần lượt là $\overline{A} = (A | B)$ và $\overline{C} = (C | D)$. Nếu ma trận $\overline{C}$ nhận được từ ma trận $\overline{A}$ bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thì hai hpt đã cho tương đương với nhau.

Giải thích: Xét hai hpt tuyến tính (I) và (II) có ma trận mở rộng lần lượt là $\overline{A}$ và $\overline{C}$. Khi đó, nếu $\overline{A} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{C}$ (dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng) thì $(I) \Leftrightarrow (II)$.

- **Thuật toán Gauss** để giải hpt tuyến tính $AX = B$.

+ Viết ma trận mở rộng của hệ: $\overline{A} = (A | B)$.

+ Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi $\overline{A}$ thành ma trận bậc thang và viết hpt tương ứng với ma trận bậc thang này.

+ Giải hpt tương ứng từ ph.trình dưới lên ph.trình trên để suy ra nghiệm của hpt đã cho.

Ví dụ 2.2:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 \quad \quad -3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Ta biến đổi ma trận mở rộng:

$$\bar{A} = (A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{d_3+d_2}]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{4d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \end{array} \right).$$

Hpt tương ứng:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_2 + x_3 = 4 \\ -x_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -16. \end{cases}$$

Vậy, hpt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x_1, x_2, x_3) = (23, 5, -16)$.

$(r(\bar{A}) = 3 = r(A) : \text{hpt có nghiệm duy nhất.})$

Ví dụ 2.3:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{d_3+d_1}]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Dòng 3 của ma trận cuối tương ứng phương trình:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2: \text{điều vô lý.}$$

Vậy, hpt đã cho vô nghiệm.

$(r(\bar{A}) = 3 \neq r(A) = 2 : \text{hpt vô nghiệm.})$

Ví dụ 2.4:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{d_3+d_1}]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 5/4 \\ x_2 = t - 3/4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}).$$

(x_3 : ẩn tự do; x_1, x_2 : ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt đã cho có vô số ngh: $(x_1, x_2, x_3) = (-2t + 5/4, t - 3/4, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

($r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $3 - 2 = 1$.)

Ví dụ 2.5:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ta biến đổi ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 - 2d_1 \\ d_3 - 5d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9t \\ x_2 = -7t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}).$$

Vậy, hpt đã cho có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (9t, -7t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

($r(A) = 2 < 3$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $3 - 2 = 1$.)

• **Định lý:** Xét hpt tuyến tính $AX = B$ gồm m phương trình n ẩn với ma trận mở rộng là $\bar{A} = (A | B)$. Khi đó:

1. nếu $r(\bar{A}) \neq r(A)$ thì **hpt vô nghiệm**,
2. nếu $r(\bar{A}) = r(A) = n$ thì **hpt có nghiệm duy nhất**,
3. nếu $r(\bar{A}) = r(A) < n$ thì **hpt có vô số nghiệm** với số ẩn tự do là $n - r(A)$.

(Do đó, **hpt có nghiệm** $\Leftrightarrow r(\bar{A}) = r(A)$ và **hpt vô nghiệm** $\Leftrightarrow r(\bar{A}) \neq r(A)$.)

• **Lưu ý:** Xét hpt tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ gồm m phtr n ẩn. Khi đó vì $r(\bar{A}) = r(A)$, hệ luôn có nghiệm (ít nhất một nghiệm $X = 0$). Hơn nữa:

1. nếu $r(A) = n$ thì **hpt có nghiệm duy nhất** (là nghiệm tầm thường $X = 0$),
2. nếu $r(A) < n$ thì **hpt có vô số nghiệm** với số ẩn tự do là $n - r(A)$.

Bài tập 2.1: Giải các hpt sau bằng phương pháp Gauss:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x - 7y + 4z = -5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 16x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 7z = 0 \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Bài tập 2.2: Giải các hpt sau bằng phương pháp Gauss:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1. \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1, d_4-3d_1]{2d_2-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -12 & 3 & -9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{d_3+2d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{3d_4+2d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -7 \end{array} \right).$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ -6x_3 - 9x_4 = 1 \\ 9x_4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \\ x_3 = \dots \\ x_4 = -7/9. \end{cases}$$

Vậy, hpt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\dots, \dots, \dots, -7/9)$.

$(r(\bar{A}) = 4 = r(A) : \text{hpt có nghiệm duy nhất.})$

$$2. \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 7 \\ 4 & -8 & -3 & -4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2, d_4 - 2d_3]{3d_2 - d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & -17 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[d_3/11, d_4/17]{d_2/7} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_4 + d_3]{d_3 + d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2m + n \\ x_2 = m \\ x_3 = 1 \\ x_4 = n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}).$$

(x_2, x_4) : ẩn tự do; x_1, x_3 : ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt đã cho có vô số ngh: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2m + n, m, 1, n)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ tùy ý.

$(r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 4 : \text{hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là } 4 - 2 = 2.)$

$$3. \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[2d_3 - d_2, d_4 - d_2]{3d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[d_4 + 2d_3]{d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{d_4 + 6d_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \end{array} \right).$$

Dòng 4 của ma trận cuối tương ứng phương trình:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -32: \text{điều vô lý.}$$

Vậy, hpt đã cho vô nghiệm.

$(r(\bar{A}) = 4 \neq r(A) = 3: \text{hpt vô nghiệm.})$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_2, d_4+d_3]{d_2+d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_4-d_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -8x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0 \\ 4x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - n/2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -n/2 \\ x_4 = m \\ x_5 = n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}).$$

(x_4, x_5) : ẩn tự do; x_1, x_2, x_3 : ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt có VSN: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (m - n/2, 0, -n/2, m, n)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ tùy ý.

$(r(A) = 3 < 5)$: hpt có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $5 - 3 = 2$.)

Bài tập 2.3: Tìm m để hpt sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m. \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array} \right).$$

Do đó, hpt đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow r(\overline{A}) \neq r(A)$

$$\Leftrightarrow r(\bar{A}) \neq 2 \text{ (vì } r(A) = 2)$$

$$\Leftrightarrow m - 5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 5.$$

Bài tập 2.4: Tìm m để hpt sau có nghiệm duy nhất? có nghiệm?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = m. \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 & m \end{array} \right) \xrightarrow[3d_3 - d_2, d_4 - 4d_3]{2d_2 - 3d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -5 & m-4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[d_4 + d_3]{d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Do đó, hpt đã cho có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow r(\bar{A}) = r(A) = 4$. (*)

Ta thấy $r(A) = 3 \Rightarrow$ Điều kiện (*) không thỏa.

Vậy, không tồn tại m để hpt đã cho có nghiệm duy nhất.

Hơn nữa, hpt đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow r(\bar{A}) = r(A)$

$$\Leftrightarrow r(\bar{A}) = 3 \text{ (vì } r(A) = 3)$$

$$\Leftrightarrow m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 3.$$

Bài tập 2.5: Tìm m để hpt sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 6x_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -3 \\ -5 & 2 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -6 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & -5 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & 4 & -6 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-d_1, d_4-d_3]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & m+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_3]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, hpt đã cho có vô số nghiệm $\Leftrightarrow r(A) < 4$. (*)

Ta thấy: + với $m = 0$ thì $r(A) = 2 < 4 \Rightarrow$ Điều kiện (*) thỏa,

+ với $m \neq 0$ thì $r(A) = 3 < 4 \Rightarrow$ Điều kiện (*) thỏa.

Vậy, với mọi m , hpt đã cho có vô số nghiệm.

Bài tập 2.6: Tìm a để hpt sau:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

1. có nghiệm,

2. có duy nhất nghiệm,

3. có vô số nghiệm.

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-ad_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array} \right).$$

$$* 1-a=0 \Leftrightarrow a=1. \text{ Khi đó: } \overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2$: hpt vô nghiệm.

$$* a-2=0 \Leftrightarrow a=2. \text{ Khi đó: } \overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2$: hpt vô nghiệm.

* $1-a \neq 0$ và $a-2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq 2$. Khi đó:

$r(\overline{A}) = 3 = r(A)$: hpt có nghiệm duy nhất.

Kết luận: 1. $a \neq 1$ và $a \neq 2$: hpt có nghiệm,

2. $a \neq 1$ và $a \neq 2$: hpt có nghiệm duy nhất,

3. không tồn tại a để hpt có vô số nghiệm.

Bài tập 2.7: Tìm tất cả các ma trận giao hoán được với các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 2.8: Tìm ma trận vuông cấp hai sao cho bình phương của nó bằng ma trận đơn vị.

Bài tập 2.9: Bằng phương pháp Gauss, giải và biện luận hpt sau theo tham số m :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m. \end{cases}$$

* **Bài tập** liên quan đến việc giải hệ ph. trình tuyến tính (dùng ph. Pháp Gauss) và các tính chất tập nghiệm của hệ (dùng hạng ma trận) trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: các trang từ 90 đến 95.

III. Định thức

1. Định nghĩa và các tính chất.

• *Định nghĩa:* Cho A là ma trận vuông cấp n . **Định thức** của A , ký hiệu $|A|$ (hay **det(A)**), là một số thực được xác định như sau.

+ $n = 1$: với $A = (a)$ thì $|A| = a$.

+ $n = 2$: với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $|A| = ad - bc$.

+ $n = 3$: với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ thì ta có thể tính $|A|$ bằng quy tắc như sau:

$$(+)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$(-)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}).$$

Các số hạng trong nhóm thứ nhất có dấu + là: tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, tích các phần tử nằm trên đường thẳng song song đường chéo chính với phần tử ở góc đối diện.

Các số hạng trong nhóm thứ hai có dấu - là: tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ, tích các phần tử nằm trên đường thẳng song song đường chéo phụ với phần tử ở góc đối diện.

+ Tổng quát $n \geq 3$: với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

thì công thức **khai triển** $|A|$ theo dòng i là:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

và công thức ***khai triển*** $|A|$ ***theo cột j*** là:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Ở đây, A_{ij} là ***phần bù đại số*** của a_{ij} trong $|A|$ xác định bởi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

với M_{ij} là ***định thức con*** cấp $n - 1$ có được từ $|A|$ bằng cách bỏ đi dòng i và cột j của $|A|$.

Ví dụ 3.1: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = 14.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 = -5.$$

Ví dụ 3.2: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -m \\ 2m & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (-1) \cdot 5 \cdot 3 + 2m \cdot (-2) \cdot (-m) + 4 \cdot 1 \cdot 3 - (-m) \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2m \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ = -15 + 4m^2 + 12 + 15m - 24m - 2 \\ = 4m^2 - 9m - 5.$$

Ví dụ 3.3: 1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ (ktr } |A| \text{ theo dòng 1)} \\ = 6 + 2 + 1 - 9 - 3 \cdot (-6 - 1 - 6) = 39.$$

Cách khác: $|A| = 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (kh. triển $|A|$ theo **cột 2**)

$$= 3 \cdot (2 + 6 + 6 - 3) - (-1 - 3 - 2) = 39.$$

2. $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 12) = 8$ (ktr $|B|$ theo **cột 1**).

Cách khác: $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 + 6) = 8$

(khai triển $|B|$ theo **dòng 3**).

• **Tính chất:** Cho A là ma trận vuông cấp n . Khi đó:

1. $|A^T| = |A|$,
2. nếu A có một dòng (hay cột) bằng không thì $|A| = 0$,
3. nếu A là mtr tam giác thì $|A|$ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính của A ,
4. nếu các phần tử trên một dòng (hay cột) của định thức đều có thừa số chung là α thì ta có thể rút α ra ngoài định thức làm nhân tử chung,

hệ quả: $|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$,

5. nếu A có hai dòng (hay cột) tỉ lệ với nhau thì $|A| = 0$,
6. nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì $|AB| = |A| \cdot |B|$.

hệ quả: nếu A là mtr vuông và k là số tự nhiên thì $|A^k| = |A|^k$.

Ví dụ 3.4: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Ví dụ 3.5: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (vì dòng 2 bằng 3 lần dòng 1).

Ví dụ 3.6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1.1 - (-1).2 = 3$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, |B| = (-1).1 - 2.3 = -7.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, |AB| = 5.(-1) - 4.4 = -21 = |A|.|B|.$$

2. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp.

• *Tính chất:* Cho A và A' là các ma trận vuông cấp n . Khi đó:

1. nếu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ thì $|A'| = -|A|$,

2. nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $|A'| = \alpha |A|$,

3. nếu $A \xrightarrow{d_i + \alpha d_j} A'$ thì $|A'| = |A|$.

Ví dụ 3.7: 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

$$|A| = -5, |A'| = 5 = -|A|.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (d_1 \leftrightarrow d_2).$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

$$|A| = -5, |A'| = -10 = 2|A|.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (2d_2).$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 - \frac{1}{2}d_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix}.$

$$|A| = -5, |A'| = -5 = |A|.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5/2 \end{vmatrix} (d_2 - d_1/2).$$

$$* A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2 - d_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = -5, |A'| = -10 = 2|A|.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} (2d_2 - d_1).$$

• Lưu ý: + Ta cũng có các tính chất liên quan đến định thức và các phép biến đổi sơ cấp trên cột tương tự như trên.

+ Ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng **thuộc loại 3** để biến đổi các phần tử trên một cột của định thức thành số 0 (giữ lại một phần tử khác 0 làm chuẩn). Sau đó, khai triển định thức theo cột này, ta được định thức giảm cấp.

Ví dụ 3.8: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} (d_2 - 2d_1, d_3 - 2d_1, d_4 - d_1)$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ (khai triển định thức theo cột 1)}$$

$$= 3 + 6 + 60 + 24 + 15 - 3 = 105.$$

Bài tập 3.1: Tìm m để định thức sau có giá trị bằng 0:

$$1. \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{vmatrix}.$$

$$1. |A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3m + 2 + 4 + 3 - 2m - 4 = -5m + 5.$$

Do đó, $|A| = 0 \Leftrightarrow -5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$$\begin{aligned} 2. |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & m+1 \end{vmatrix} \quad (d_2 - 2d_1, d_3 - d_1, d_4 + d_3) \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & m+1 \end{vmatrix} \quad (\text{khai triển định thức theo cột 2}) \\ &= -(-9m - 9 + 9 + 18 + 3m + 3) = 6m - 21. \end{aligned}$$

Do đó, $|A| = 0 \Leftrightarrow 6m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = 7/2$.

Bài tập 3.2: Tìm m để ma trận sau có định thức khác 0:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & m & -5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 3.3: Cho A và B là các ma trận vuông cấp 3 thỏa $AB = 2I_3$ và $AB^2 = 4I_3$. Tính $|A|$ và $|B|$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} AB = 2I_3 \\ AB^2 = 4I_3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} |AB| = |2I_3| \\ |AB^2| = |4I_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A||B| = 2^3 \cdot 1 \\ |A||B||B| = 4^3 \cdot 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |A||B| = 8 \\ 8|B| = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |B| = 8 \end{cases}. \end{aligned}$$

3. Ứng dụng của định thức.

3.1 Sự khả nghịch và tìm nghịch đảo của ma trận.

- **Định nghĩa:** Cho A là mtr vuông cấp n . Ta nói A **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho:

$$AB = I_n.$$

Khi đó, B được gọi là **ma trận nghịch đảo** của A , ký hiệu $B = A^{-1}$.

Ví dụ 3.9: Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Khi đó: } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Do đó, A khả nghịch và B là ma trận nghịch đảo của A .

- **Tính chất:** Cho A và B là các ma trận vuông cấp n . Khi đó:

1. nếu A có một dòng (hay một cột) bằng không thì A không khả nghịch,
2. nếu A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1} thì các ma trận A^{-1} , A^T , αA (với $\alpha \neq 0$) cũng khả nghịch và:

$$(A^{-1})^{-1} = A, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1},$$

3. nếu A và B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

hệ quả: nếu A khả nghịch và k là số tự nhiên thì $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

- **Định lý:** Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n . Khi đó:

$$A \text{ khả nghịch} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

và ma trận nghịch đảo của A xác định bởi:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A \text{ với } P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó A_{ij} là **phần bù đại số** của a_{ij} trong $|A|$ xác định bởi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

với M_{ij} là **định thức con** cấp $n - 1$ có được từ $|A|$ bằng cách bỏ đi dòng i và cột j của $|A|$. Ma trận P_A được gọi là **ma trận phụ hợp** của A .

Ví dụ 3.10: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

$$\begin{array}{lll} 1. \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, & 2. \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}, & 3. \ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$1. \ |A| = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

$$\text{Do đó, } A \text{ khả nghịch và } A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2, \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

$$\text{Vậy, } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{vmatrix} = -30 - 9 - 52 + 60 + 18 + 13 = 0.$$

Do đó, A không khả nghịch.

$$3. \ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 8 + 4 - 10 - 32 - 6 = 24 \neq 0.$$

Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12, A_{13} = -6;$$

$$A_{21} = -7, A_{22} = 10, A_{23} = 1, A_{31} = -1, A_{32} = -2, A_{33} = 7.$$

$$\text{Vậy, } A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}.$$

• Cho A là ma trận vuông. Khi đó:

$$A \text{ là suy biến} \Leftrightarrow A \text{ không khả nghịch} \Leftrightarrow |A| = 0,$$

$$A \text{ là khả nghịch} \Leftrightarrow A \text{ không suy biến} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

• *Tính chất:* 1. Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

2. Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $A \cdot P_A = P_A \cdot A = |A| \cdot I_n$.

Ví dụ 3.11: Cho A là mtr vuông cấp 3 có $|A| = 2$. Tính $|A^{-1}|$, $|-3A|$ và $|P_A|$.

$$\text{Ta có: } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1/2,$$

$$|-3A| = (-3)^3 \cdot |A| = -27 \cdot 2 = -54.$$

Từ đẳng thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$, tức là $A^{-1} = \frac{1}{2} P_A$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|A^{-1}| = \left| \frac{1}{2} P_A \right| \Leftrightarrow \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot |P_A| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot |P_A| \Leftrightarrow |P_A| = 4.$$

Ví dụ 3.12: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$. Tìm m để:

1. A là ma trận suy biến (tức không khả nghịch),
2. A là ma trận khả nghịch (tức không suy biến) và tính $|A^{-1}|$.

$$\text{Ta tính được: } |A| = m + 2 + 9 + 1 + 3 - 6m = -5m + 15.$$

1. A là ma trận suy biến $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$\Leftrightarrow -5m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

2. A là ma trận khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$\Leftrightarrow -5m + 15 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3.$$

$$\text{Khi đó, } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-5m+15}.$$

Bài tập 3.4: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

1. Tìm m để A suy biến (không khả nghịch).

2. Khi $m = -3$, hãy tìm ma trận A^{-1} .

Bài tập 3.5: Tìm m để ma trận sau suy biến:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix},$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & m & -5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Bài tập 3.6: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

1. Tìm m để A khả nghịch (không suy biến).

2. Khi $m = 1$, hãy tìm ma trận A^{-1} .

Bài tập 3.7: Tìm m để ma trận sau không suy biến:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix},$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ m & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Bài tập 3.8: Cho A là mtr vuông cấp 4 có $|A| = -2$. Tính $|3A^T|$, $|(2A)^{-1}|$ và $|P_{2A}|$.

$$\text{Ta có: } |3A^T| = 3^4 \cdot |A^T| = 3^4 \cdot |A| = 81 \cdot (-2) = -162,$$

$$|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^4 \cdot |A|} = \frac{1}{2^4 \cdot (-2)} = -\frac{1}{32}.$$

Cách khác: $|(2A)^{-1}| = \left| \frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^4 |A^{-1}| = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{32}.$

Từ $(2A)^{-1} = \frac{1}{|2A|} P_{2A}$, tức là $(2A)^{-1} = -\frac{1}{32} P_{2A}$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|(2A)^{-1}| = \left| -\frac{1}{32} P_{2A} \right| \Leftrightarrow -\frac{1}{32} = \left(-\frac{1}{32} \right)^4 \cdot |P_{2A}| \Leftrightarrow |P_{2A}| = -32^3.$$

Bài tập 3.9: Cho A là mtr vuông cấp 3 có $|A| = 3$ và $A^{-1} = (1/|A|).B$. Tính $|B^2|$.

Từ đẳng thức $A^{-1} = (1/|A|).B$, tức là $A^{-1} = (1/3).B$, lấy định thức hai vế ta được:

$$|A^{-1}| = |(1/3).B| \Leftrightarrow 1/|A| = (1/3)^3 \cdot |B| \Leftrightarrow 1/3 = (1/27) \cdot |B| \Leftrightarrow |B| = 9.$$

Do đó, $|B^2| = |B|^2 = 81.$

Bài tập 3.10: Cho A, B và C là các mtr vuông cấp 3 có $|A| = -2$, $|B| = 4$, $|C| = 1$ và $M = 5A^2.B.C^{-1}$. Tính $|M|$.

Ta có: $|M| = |5A^2.B.C^{-1}| = 5^3 \cdot |A^2| \cdot |B| \cdot |C^{-1}| = 5^3 \cdot |A|^2 \cdot |B| \cdot (1/|C|)$
 $= 125 \cdot (-2)^2 \cdot 4 \cdot (1/1) = 2000.$

Bài tập 3.11: Cho A và B là các mtr vuông cấp 4 có $|A| = 3$, $|B| = 2$ và $(AB)^{-1} = (1/|AB|).C$.
 Tính các định thức: $|C|$, $|P_A|$, $|P_B|$, $|P_{AB}|$, $|P_{2A}|$ và $|P_{3B}|$.

Bài tập 3.12 Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = A^5 + mA^6$. Tìm m để B không khả đảo (nghịch).

Ta có: $B = A^5 + mA^6 = A^5(I_2 + mA)$.

Do đó: $|B| = |A^5(I_2 + mA)| = |A|^5 \cdot |I_2 + mA|.$

Mặt khác: $|A| = -3$ và

$$\begin{aligned} |I_2 + mA| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1+m & 2m \\ 2m & 1+m \end{vmatrix} \\ &= (1+m)^2 - 4m^2 = (3m+1)(-m+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vì thế, B không khả nghịch} &\Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow |A|^5 \cdot |I_2 + mA| = 0 \\
&\Leftrightarrow (-3)^5 \cdot (3m + 1)(-m + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow m = -1/3 \text{ hoặc } m = 1.
\end{aligned}$$

Bài tập 3.13: Cho A là mtr vuông cấp 3 thỏa $A^3 - mI_3 = 0$. Với giá trị nào của m thì A không khả đảo (nghịch)?

$$\text{Ta có: } A^3 - mI_3 = 0 \Leftrightarrow A^3 = mI_3. (*)$$

$$\text{Lấy định thức hai vế của } (*), \text{ ta được: } |A^3| = |mI_3| \Leftrightarrow |A|^3 = m^3 \cdot 1 \Leftrightarrow |A| = m.$$

$$\text{Do đó: A không khả nghịch} \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Bài tập 3.14: Cho mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & m & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Với giá trị nào của m thì mtr $A^2 A^T$ suy biến?

$$\text{Ta có: } |A| = 5m - 6.$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó: } A^2 A^T \text{ suy biến} &\Leftrightarrow |A^2 A^T| = 0 \Leftrightarrow |A^2| \cdot |A^T| = 0 \\
&\Leftrightarrow |A|^2 \cdot |A| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6/5.
\end{aligned}$$

Bài tập 3.15: Cho A và B là các mtrận vuông cùng cấp khả nghịch và $C = (2/3)A^T(4/5)B^{-1}$. Tính C^{-1} theo A và B.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } C &= (2/3)A^T(4/5)B^{-1} \Leftrightarrow C = (2/3)(4/5)A^T B^{-1} \\
&\Leftrightarrow C = (8/15)A^T B^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó: } C^{-1} &= (15/8)[A^T B^{-1}]^{-1} \Leftrightarrow C^{-1} = (15/8)[B^{-1}]^{-1} \cdot [A^T]^{-1} \\
&\Leftrightarrow C^{-1} = (15/8)B \cdot [A^{-1}]^T.
\end{aligned}$$

Bài tập 3.16: Cho A và B là các mtr vuông cùng cấp thỏa $A \neq 0$, $B \neq 0$ và $AB = 0$. Chứng tỏ A và B đều không khả nghịch.

Ta chứng minh A không khả nghịch. Thật vậy, giả sử A khả nghịch, tức là tồn tại A^{-1} . Nhân bên trái hai vế của đẳng thức $AB = 0$ với A^{-1} , ta được:

$$A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow B = 0: \text{ mâu thuẫn giả thiết } B \neq 0.$$

Vậy, A không khả nghịch.

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được B không khả nghịch.

*** Phương pháp khác để xét sự khả nghịch và tìm nghịch đảo của ma trận.**

• *Định lý:* Cho A là mtr vuông cấp n. Khi đó:

$$A \text{ khả nghịch} \Leftrightarrow r(A) = n.$$

Hơn nữa, những phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào biến A thành I_n thì cũng chính những phép biến đổi đó (với cùng thứ tự trên) sẽ biến I_n thành A^{-1} . Nghĩa là:

$$\begin{aligned} \text{nếu } A &\xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n \\ \text{thì } I_n &\xrightarrow{\varphi_1} B_1 \xrightarrow{\varphi_2} B_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}. \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$(A | I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 | B_1) \xrightarrow{\varphi_2} (A_2 | B_2) \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} (A_k | B_k) = (I_n | A^{-1}).$$

• *Cách tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A cấp n:*

+ Viết ma trận mở rộng: $(A | I_n)$.

+ Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp đối với $(A | I_n)$ để biến A thành I_n (tức là xây dựng lần lượt các cột chuẩn: $(1, 0, \dots, 0)^T$, $(0, 1, \dots, 0)^T$, ..., $(0, 0, \dots, 1)^T$ trong A từ trái sang phải).

+ Nếu A biến được thành I_n thì I_n biến thành ma trận tương ứng bên phải vạch đứng | ở bước cuối cùng là A^{-1} . Nếu A không biến được thành I_n thì A không khả nghịch.

Ví dụ 3.13: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 1. (A | I_2) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2+d_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Do đó, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[d_3-3d_2]{d_1+2d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_1+6d_3]{-d_3, d_2+2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 27 & -16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array} \right). \\
 \text{Do đó, } A^{-1} &= \begin{pmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

• *Lưu ý:* Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó:

$$A \text{ khả nghịch (không suy biến)} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n,$$

$$A \text{ không khả nghịch (suy biến)} \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n.$$

3.2 Phương trình ma trận.

• **Dạng 1:** Phương trình $AX = B$.

Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì nghiệm của phương trình là $X = A^{-1}B$.

Giải thích: $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}.AX = A^{-1}.B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B$.

Ví dụ 3.14: Giải phương trình ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. (*)$$

Phương trình (*) có dạng $AX = B$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

+ **Cách 1:** Phương pháp ma trận nghịch đảo.

Ta có: $|A| = -1 \neq 0$. Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.5 = 5, A_{12} = (-1)^{1+2}.3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.2 = -2, A_{22} = (-1)^{2+2}.1 = 1.$$

Vì thế, $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy, nghiệm của phtr (*) là

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

+ **Cách 2:** Phương pháp hệ phương trình tuyến tính.

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Thay vào phtr (*), ta được:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+5z & 3y+5t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=1 & (1) \\ y+2t=-2 & (2) \\ 3x+5z=-1 & (3) \\ 3y+5t=1 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) và (3), ta giải được $x = -7, z = 4$. Từ (2) và (4), ta giải được $y = 12, t = -7$.

Vậy, nghiệm của phtr (*) là $X = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

• **Dạng 2:** Phương trình $XA = B$.

Nếu A là ma trận vuông khả nghịch thì nghiệm của phương trình là $X = BA^{-1}$.

Giải thích: $XA = B \Leftrightarrow XA.A^{-1} = B.A^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$.

Bài tập 3.17: Giải các phương trình ma trận:

$$1. \quad X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad 3. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1. \quad \text{Phtr có dạng } XA = B \text{ với } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

+ **Cách 1:** Phương pháp ma trận nghịch đảo.

Ta có: $|A| = 5 \neq 0$. Do đó, A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

$$\text{Vì thế, } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy, nghiệm của phtr đã cho là

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 & 8/5 \\ 14/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

+ **Cách 2:** Phương pháp hpt tuyến tính.

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Thay vào phtr đã cho, ta được:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y & x+4y \\ 2z+3t & z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+4y=5 \\ 2z+3t=5 \\ z+4t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7/5 \\ y=8/5 \\ z=14/5 \\ t=-1/5 \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phtr đã cho là $X = \begin{pmatrix} -7/5 & 8/5 \\ 14/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

2. Phtr đã cho có dạng $AX = B$ với $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

+ **Cách 1:** Phương pháp ma trận nghịch đảo $X = A^{-1} \cdot B$.

+ **Cách 2:** Phương pháp hpt tuyến tính. Đặt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Thay vào phtr ta được:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+2z \\ -x-y+2z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=1 \\ -x-y+2z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \\ z=\dots \end{cases}$$

Bài tập 3.18: Cho phương trình ma trận $A^T X B C = D$, trong đó A, B, C, D là các mtr vuông cùng cấp và A, B, C khả nghịch. Tìm X theo A, B, C, D .

Xét phtr $A^T X B C = D. (*)$

Nhân bên trái hai vế của (*) với $(A^T)^{-1}$ và nhân bên phải hai vế của (*) với $(BC)^{-1}$, ta được:

$$(A^T)^{-1}.A^T X B C.(B C)^{-1} = (A^T)^{-1}.D.(B C)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = (A^{-1})^T \cdot D \cdot C^{-1} \cdot B^{-1}.$$

Bài tập 3.19: Cho các mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm mtr X sao cho $AX = B$.

* **Bài tập** liên quan đến định thức, sự khả nghịch và tìm nghịch đảo của ma trận, và phương trình ma trận trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: **các trang từ 42 đến 52.**

3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer.

- Xét hpt tuyến tính gồm n phương trình n ẩn như sau:

[illegible]

Khi đó hpt (I) có dạng $AX = B$ với A: *ma trận hệ số*, X: *cột các ẩn* và B: *cột hệ số tự do*.

Hpt (I) được gọi là **hệ Cramer** nếu ma trận A không suy biến (khả nghịch), tức là $|A| \neq 0$. Khi đó, hpt (I) có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}B$.

Ngoài phương pháp giải bằng ma trận nghịch đảo như trên, ta còn có ***phương pháp Cramer*** như sau:

$$x_j = \frac{D_j}{|A|}, \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó D_j ($j = 1, 2, \dots, n$) là định thức của ma trận có được bằng cách thay cột j của ma trận A bằng cột hệ số tự do B .

Ví dụ 3.15: Giải hpt sau bằng phương pháp Cramer:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2.$$

Vậy, hệ phtr đã cho có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = (3, 1, -1).$$

Ví dụ 3.16: Giải và biện luận hpt sau theo tham số m :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2 \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 + 2m^2 - 10m - 4 - 2m^2 + 4m + 4m + 4 - m + 5 \\ &= m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3), \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 20 + 4 + 4m - 8 - 4m - 4 = -4m + 12 = -4(m-3),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 2m + 2 + 8 - 4m + 2m - 10 = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2m + 4 + 4m - 8 - 2 = 2m - 6 = 2(m - 3).$$

* $|A| \neq 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 3$: hệ phtr có nghiệm duy nhất

$$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = (-4/(m - 1), 0, 2/(m - 1)).$$

* $|A| = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 3$. Xét hai trường hợp sau.

+ $m = 1$: $|A| = 0$, $D_1 = 8 \neq 0$. Khi đó, hệ phtr vô nghiệm.

+ $m = 3$: $|A| = 0$, $D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Khi đó, hệ phtr vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{Hpt tương ứng: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6t/5 - 4/5 \\ x_2 = -2t/5 + 2/5 \quad (t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}). \\ x_3 = t \end{cases}$$

(x_3 : ẩn tự do; x_1, x_2 : ẩn phụ thuộc.)

Vậy, hpt có vô số nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = (-6t/5 - 4/5, -2t/5 + 2/5, t) \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Kết luận: * $m \neq 1$ và $m \neq 3$: hệ phtr có nghiệm duy nhất

$$(x_1, x_2, x_3) = (-4/(m - 1), 0, 2/(m - 1)).$$

* $m = 1$: hệ phtr vô nghiệm.

* $m = 3$: hệ phtr có vô số ngh:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-6t/5 - 4/5, -2t/5 + 2/5, t) \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

- *Lưu ý*: Xét hệ phtr có số phtr bằng số ẩn ($= n$) với các định thức $|A|, D_1, D_2, \dots$ và D_n . Khi đó:

* $|A| \neq 0$: hệ phtr có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (D_1/|A|, D_2/|A|, \dots, D_n/|A|)$;

* $|A| = 0$ và tồn tại $D_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$): hệ phtr vô nghiệm;

* $|A| = 0$ và $D_j = 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$: hệ phtr vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.
Lúc này, ta phải dùng thuật toán Gauss để giải hệ.

Bài tập 3.20: Cho hpt sau:
$$\begin{cases} x & + y & + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y & + 5z = 1 \\ x + (m+1)y + (m+2)z = m^2 - m + 1 \end{cases}.$$

1. Tìm m để hpt đã cho là hệ Cramer. Khi đó, tìm nghiệm của hệ.
2. Tìm m để hpt đã cho vô nghiệm.

1. Ta có: $|A| = m^2 - m$.

Do đó: hpt đã cho là hệ Cramer $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Khi đó, hpt có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (D_1/|A|, D_2/|A|, D_3/|A|) = \dots$

2. Hpt đã cho vô nghiệm $\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

Thử lại. + Với $m = 0$, ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt có VSN. Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu đề bài.

+ Với $m = 1$, ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow r(\overline{A}) = 3 \neq r(A) = 2$: hpt vô nghiệm. Do đó $m = 1$ thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy $m = 1$.

Bài tập 3.21: Cho hpt sau:
$$\begin{cases} x & - 2y & + 3z = 0 \\ 2x + (m-4)y & + 7z = 0 \\ -x + (m+2)y + (m-1)z = 0 \end{cases}.$$

1. Tìm m để hpt đã cho có nghiệm duy nhất.
2. Với $m = 0$, giải hpt đã cho.

1. Nếu dùng phương pháp hàng ma trận, ta được:

$$\text{Hpt có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow r(A) = 3.$$

Đối với bài tập đang giải, phương pháp trên khó làm.

Nếu dùng phương pháp định thức, ta có:

$$\text{Hpt có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

Phương pháp này dễ làm hơn.

Ta tính được $|A| = m(m + 1)$.

Do đó:

Hpt có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m(m + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq -1.$$

2. Với $m = 0$, ta thấy: $|A| = 0$. Lúc này, ta không thể dùng phương pháp định thức để giải hpt đã cho. Ta dùng phương pháp Gauss để giải hệ. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ phtr tương ứng:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Vậy với $m = 0$, hpt đã cho có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (2t, t, 0)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.22: Cho hpt sau:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + (m+5)y - 2z = 4 \\ x + (m+3)y + (m-1)z = m+3 \end{cases}.$$

1. Tìm m để hpt đã cho vô nghiệm.

2. Tìm m để hệ đã cho có vô số nghiệm. Khi đó, tìm tất cả các nghiệm của hệ.

Bài tập 3.23: Giải và biện luận hpt sau:

$$1. \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2by + z = 4 \\ 2x + 3by + 2z = 7 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}$$

Bài tập 3.24: Cho hpt sau: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$

Khi đó, hệ đã cho là hệ Cramer khi và chỉ khi:

- A. $a \neq 1$;
- B. $a \neq 2$;
- C. $a = 1$ hoặc $a = 2$;
- D. $a \neq 1$ và $a \neq 2$.

Ta có: $|A| = -a^2 + 3a - 2$.

Do đó:

Hpt đã cho là hệ Cramer

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + 3a - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq 1 \text{ và } a \neq 2.$$

Vậy, ta chọn đáp án **D**.

Bài tập 3.25: Cho hpt: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \\ a^2x + 3ay = 4 \end{cases}$

Khi đó, hệ đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $a = 1$;
- B. $a = -4$;
- C. $a = 1$ hoặc $a = -4$;
- D. $a \neq 1$ và $a \neq -4$.

Từ các phtr thứ nhất và thứ hai của hệ, ta giải được: $(x, y) = (1, 1)$.

Do đó:

Hệ đã cho có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$ là nghiệm của phtr thứ ba trong hệ

$$\Leftrightarrow a^2 \cdot 1 + 3a \cdot 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = -4.$$

Vậy, ta chọn đáp án **C**.

Bài tập 3.26: Cho hpt sau:
$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3 + m \\ 2x + my - 3z = m - 1 \\ 2x - my + 2mz = -2 \end{cases}.$$

Biết rằng $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là một nghiệm của hệ. Chọn mệnh đề đúng:

- A. $m = -4$ và hệ đã cho có vô số nghiệm;
- B. $m = -4$ và hệ đã cho có nghiệm duy nhất;
- C. $m = -2$ và hệ đã cho có vô số nghiệm;
- D. $m = -2$ và hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Vì $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là một nghiệm của hệ, ta có:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 + m \cdot 1 = 3 + m \\ 2 \cdot 1 + m \cdot 1 - 3 \cdot 1 = m - 1 \\ 2 \cdot 1 - m \cdot 1 + 2m \cdot 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

Cách 1: Dùng hạng ma trận để kết luận tính chất nghiệm. Với $m = -4$, ta được:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & -8 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ta thấy: $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt đã cho có vô số nghiệm. Ta chọn đáp án **A**.

Cách 2: Dùng định thức để kết luận tính chất nghiệm. Với $m = -4$, ta được:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó, hpt đã cho không duy nhất nghiệm (tức là vô nghiệm hoặc vô số nghiệm). Ta chọn đáp án **A**.

Lưu ý: Nếu trong đề bài, các đáp án **A**, **C** và **D** vẫn giữ nguyên như trước và đáp án **B** được thay bởi đáp án **B***:

B*. $m = -4$ và hệ đã cho vô nghiệm,

thì ta chọn đáp án nào khi giải bằng **cách 2**?

Sau khi tính $|A| = 0$, ta kết luận hpt đã cho vô nghiệm hoặc vô số nghiệm nên ta chưa thể chọn được đáp án **A** hay đáp án **B***.

Khi đó, ta lập luận tiếp như sau. Vì hpt đã cho có nghiệm $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, ta kết luận hệ không vô nghiệm. Vì thế, hệ có vô số nghiệm. Vậy, ta chọn đáp án **A**.

Bài tập 3.27: Cho hpt sau:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + mz = 2 \end{cases}$$

Phát biểu nào sau đây là sai:

- A.** Không tồn tại m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất;
- B.** Tồn tại m để hệ đã cho có vô số nghiệm;
- C.** Tồn tại m để hệ đã cho có nghiệm;
- D.** Với mọi m hệ đã cho đều có nghiệm?

Ta có thể dùng phương pháp hạng ma trận hoặc phương pháp định thức để giải bài này. Sau đây, ta dùng phương pháp định thức. Ta tính được: $|A| = m + 5$. Xét hai trường hợp sau.

+ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -5$: hpt đã cho có nghiệm duy nhất. Do đó, đáp án **A** là sai.

+ $|A| = 0 \Leftrightarrow m = -5$: ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ta thấy: $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$: hpt đã cho có vô số nghiệm.

Vậy, các đáp án **B**, **C** và **D** là đúng.

Bài tập 3.28: Cho A và B là các mtr vuông cấp n thỏa $A^2B - AB^2 = I_n$. Chọn kết luận sai:

- A. Các mtr A , B và $A - B$ đều khả nghịch;
- B. Mtr $A - B$ khả nghịch và $(A - B)^{-1} = BA$;
- C. $AB(A - B) = I_n$;
- D. $A - B = A^{-1}B^{-1}$.

Bài tập 3.29: Cho A , B và X là các mtr vuông cấp n thỏa mãn $AX = B$ và $X^2 = I_n$ trong đó $X \neq -I_n$. Chọn phát biểu sai:

- A. Nếu A khả nghịch thì B khả nghịch;
- B. $BX = A$;
- C. $A - B$ là mtr suy biến;
- D. $\det(X) = 1$.

Bài tập 3.30: Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là mtr có $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ và thỏa mãn $A^T + 2A = I_n$. Chọn phát biểu sai:

- A. $A = A^T$;
- B. $|A| = 3^n$;
- C. $A + 2A^T = I_n$;
- D. $|A| = 1/3^n$.

*** Tính hạng của ma trận bằng cách dùng định thức.**

Cho A là mtr tùy ý. Nếu A có ít nhất một định thức con cấp k khác 0 và mọi định thức con cấp $k + 1$ đều bằng 0, thì hạng $\mathbf{r}(A) = k$. Nói cách khác, $\mathbf{r}(A)$ chính là cấp lớn nhất của định thức con khác 0 của A .

Lưu ý: Định thức con cấp k của mtr A là định thức con tạo thành từ k dòng và k cột của mtr A .

Ví dụ 3.17: Tìm hạng của mtr $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -7 \\ 2 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Đầu tiên, ta tính các định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -7 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -7 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 9 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Tiếp theo, ta tính một định thức con cấp 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Do đó, $r(A) = 2$.

Ví dụ 3.17*: Tìm hạng của mtr $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -7 \\ 2 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Ta tính một định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Do đó, $r(A) = 3$.

* **Bài tập** liên quan đến việc giải hệ ph. trình tuyến tính và các tính chất tập nghiệm của hệ (dùng ph. pháp định thức) trong sách *Bài tập Toán Cao cấp: các trang từ 90 đến 95*.

3.4 Ứng dụng trong phân tích kinh tế: Mô hình Input-Output mở Leontief.

Mô hình này nhằm xác định đầu ra của mỗi ngành trong n ngành sao cho vừa đủ để thỏa mãn toàn bộ nhu cầu (bên trong và bên ngoài) về các loại sản phẩm đó.

Giả sử trong mô hình ta có:

- + mỗi ngành chỉ sản xuất một mặt hàng thuần nhất,
- + mỗi ngành sử dụng một tỉ lệ cố định các nguyên liệu đầu vào từ các ngành khác cho sản xuất đầu ra,
- + mọi lượng đầu vào thay đổi k lần thì lượng đầu ra thay đổi k lần.

Ký hiệu a_{ij} là **hệ số đầu vào** đối với nền kinh tế n ngành, được xếp trong mtr sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó a_{ij} là *giá trị đơn vị tiền của lượng nguyên liệu mà ngành i cung cấp cho ngành j để ngành j sản xuất ra một lượng sản phẩm (hàng hóa) có giá trị một đơn vị tiền.*

Do đó **cột j của mtr A** cho biết những yêu cầu đầu vào của ngành j từ n ngành (tức là lượng nguyên liệu mà n ngành cần cung cấp cho ngành j) để ngành j sản xuất ra một lượng sản phẩm trị giá một đơn vị tiền.

Bên cạnh n ngành, mô hình còn có một ngành khác được gọi là **ngành mở**, cung ứng những đầu vào thiết yếu (ví dụ như lao động, dịch vụ, ...) cho n ngành trên. Ngược lại, sản lượng của các ngành được xác định bởi yêu cầu nguyên liệu của các ngành trong nền kinh tế và yêu cầu cuối (yêu cầu dự trữ, xuất khẩu). Lượng yêu cầu cuối này được xem là yếu tố để lập kế hoạch cho toàn bộ ngành kinh tế.

Ta có $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ là tổng giá trị lượng nguyên liệu mà n ngành cung cấp cho ngành j để ngành j sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá một đơn vị tiền (với $j = 1, 2, \dots, n$). Để hợp lý về mặt kinh tế, ta giả sử $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

Vậy giá trị mà ngành mở đóng góp cho ngành j để ngành j sản xuất lượng hàng hóa trị giá một đơn vị tiền là $a_{0j} = 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

Gọi **lượng đầu ra (sản lượng)** của n ngành lần lượt là $x_1, x_2, \dots, x_n$ và **yêu cầu cuối cùng của ngành mở** đối với ngành thứ i là d_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Giả sử ngành thứ i sản xuất một lượng đầu ra x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vừa đủ để đáp ứng những đ. kiện đầu vào của n ngành và đáp ứng yêu cầu cuối cùng của ngành mở. Ta có hpt:

$$X = AX + D, \text{ tức là } (I_n - A)X = D,$$

trong đó

I_n : ma trận đơn vị cấp n ,

A : *ma trận các hệ số đầu vào*,

X : *vector cột của lượng đầu ra* và

D : *vector cột biểu thị các yêu cầu cuối cùng của ngành mở đối với n ngành.*

Giải hpt trên, ta được nghiệm $\mathbf{X} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D}$ (hoặc ta có thể giải hpt bằng phương pháp Cramer).

Tóm lại, ta cần nắm các ý chính sau:

+ Ý nghĩa của hệ số a_{ij} : Ngành i cung cấp cho ngành j lượng nguyên liệu trị giá a_{ij} đvt để ngành j sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

+ Ý nghĩa của cột j trong ma trận $\mathbf{A}$: lượng nguyên liệu (tính bằng đvt) mà n ngành cần cung cấp cho ngành j để ngành j sản xuất ra một lượng sản phẩm trị giá 1 đvt.

+ Ý nghĩa của tổng $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ và của hệ số $a_{0j} = 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

+ Công thức quan trọng:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

($\mathbf{A}$: ma trận các hệ số đầu vào, $\mathbf{X}$: vector cột của lượng đầu ra của n ngành và $\mathbf{D}$: vector cột biểu thị các yêu cầu của ngành mở đối với n ngành).

Ví dụ 3.18: Trong mô hình Input-Output mở, cho biết ma trận hệ số đầu vào:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23} trong mtr $\mathbf{A}$.
2. Tìm mức sản lượng của ba ngành nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng (70, 100, 30).

1. Ta có: $a_{23} = 0,3$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 2 cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,3 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

2. Bài toán cơ bản: Tìm $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $\mathbf{D} = (d_1, d_2, d_3)^T = (70, 100, 30)^T$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{AX} + \mathbf{D} \\ \Leftrightarrow \mathbf{X} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ta có thể giải hệ (1) bằng phương pháp ma trận nghịch đảo $X = (I_3 - A)^{-1}D$ hoặc phương pháp Cramer.

Sau đây, ta giải hệ (1) bằng phương pháp Cramer.

$$\text{Ta có: } a = |I_3 - A| = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,352 \neq 0;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 70 & -0,1 & -0,1 \\ 100 & 0,8 & -0,3 \\ 30 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 52,8; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0,7 & 70 & -0,1 \\ -0,1 & 100 & -0,3 \\ -0,2 & 30 & 0,8 \end{vmatrix} = 70,4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & 70 \\ -0,1 & 0,8 & 100 \\ -0,2 & -0,3 & 30 \end{vmatrix} = 52,8.$$

Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = (D_1/a, D_2/a, D_3/a) = (150, 200, 150).$$

Bài tập 3.31: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{12} = 0,2$.
2. Biết sản lượng của ngành 2 là 100, tính tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà các ngành cung cấp cho nó.
3. Tìm ma trận nghịch đảo của $I_3 - A$. Tìm mức sản lượng của ba ngành, nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng (39, 49, 16).
4. Nếu yêu cầu xuất khẩu dự trữ thay đổi đối với các ngành là $\Delta D = (3, -2, 0)^T$, thì hãy tính mức thay đổi sản lượng của các ngành.

1. Ta có: $a_{12} = 0,2$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 1 cung cấp cho ngành 2 lượng nguyên liệu trị giá 0,2 đvt để ngành 2 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

2. Biết $x_2 = 100$. Ta cần tính tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà ba ngành 1, 2 và 3 cung cấp cho ngành 2.

Ta dùng quy tắc tam suất để giải câu này. Ta có sơ đồ:

$$\begin{array}{l} a_{12} = 0,2 \text{ -----} > 1 \\ ? \text{ -----} > x_2 = 100. \end{array}$$

Do đó, sản lượng nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 = 0,2 \cdot 100 = 20 \text{ (đvt)}.$$

Tương tự, sản lượng nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{22}x_2 = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ (đvt)}.$$

Sản lượng nguyên liệu mà ngành 3 cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{32}x_2 = 0,3 \cdot 100 = 30 \text{ (đvt)}.$$

Vậy, tổng giá trị của sản lượng nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + a_{32}x_2 = (a_{12} + a_{22} + a_{32})x_2 = 60 \text{ (đvt)}.$$

3. Đặt $B = I_3 - A$. Ta cần tìm $B^{-1} = (I_3 - A)^{-1}$.

Ta có: $B^{-1} = (1/|B|) \cdot P_B$.

$$|B| = |I_3 - A| = \begin{vmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 \\ -0,3 & 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,488;$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0,9 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,69; B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -0,3 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,26; B_{13} = 0,27;$$

$$B_{21} = 0,25; B_{22} = 0,66; B_{23} = 0,31; B_{31} = 0,29; B_{32} = 0,18; B_{33} = 0,75.$$

Do đó:

$$B^{-1} = \frac{1}{0,488} \begin{pmatrix} 0,69 & 0,25 & 0,29 \\ 0,26 & 0,66 & 0,18 \\ 0,27 & 0,31 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Ta có bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (39, 49, 16)^T$.

Ta dùng đẳng thức:

$$\begin{aligned} X &= AX + D \\ \Leftrightarrow X - AX &= D \\ \Leftrightarrow (I_3 - A)X &= D \\ \Leftrightarrow X &= (I_3 - A)^{-1} \cdot D \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{0,488} \begin{pmatrix} 0,69 & 0,25 & 0,29 \\ 0,26 & 0,66 & 0,18 \\ 0,27 & 0,31 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 49 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

4. Bài toán: Biết rằng $\Delta D = (3, -2, 0)^T$, hãy tìm ΔX . Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta X &= (I_3 - A)^{-1} \cdot \Delta D \\ \Leftrightarrow \Delta X &= \frac{1}{0,488} \begin{pmatrix} 0,69 & 0,25 & 0,29 \\ 0,26 & 0,66 & 0,18 \\ 0,27 & 0,31 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bài tập 3.32: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử sản lượng của ngành 1 và ngành 2 là 100 và nhu cầu ngành mở đối với ngành 1 là 30. Xác định nhu cầu ngành mở đối với ngành 3.

Đề bài cho biết $x_1 = x_2 = 100$ và $d_1 = 30$, hãy tìm d_3 .

Ta sử dụng đẳng thức:

$$\begin{aligned} X &= AX + D \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + d_1 \\ x_2 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 + d_2 \\ x_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + d_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ các phtr thứ nhất và thứ ba, ta có hệ:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 100 = 0,1 \cdot 100 + 0,2 \cdot 100 + 0,2x_3 + 30 \\ x_3 = 0,2 \cdot 100 + 0,1 \cdot 100 + 0,1x_3 + d_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_3 = 200 \\ d_3 = 150 \end{cases}. \end{aligned}$$

Bài tập 3.33: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}.$$

Yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành kinh tế lần lượt là 118, 52 và 96.

1. Tính và nói ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{02} .
 2. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành đáp ứng được yêu cầu của ngành mở đã cho trên.
 3. Khi ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 2 và yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành không thay đổi, hãy tính giá trị sản lượng của ba ngành.
1. Ta có: $a_{02} = 1 - (0,3 + 0,2 + 0,3) = 0,2$.
Ý nghĩa kinh tế: Ngành mở cung cấp cho ngành 2 lượng nguyên liệu trị giá 0,2 đvt để ngành 2 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.
2. Bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (118, 52, 96)^T$.
Ta sử dụng đẳng thức: $X = AX + D$.
Để giải tìm X , ta có thể dùng cách giải tương tự cách giải trong **Ví dụ 3.18** hoặc trong **Bài tập 3.31 câu 3**.
3. Ta biết: $a_{21} = 0,4$ (hệ số đầu vào cũ). Gọi a_{21}^* là hệ số đầu vào mới.
Ta có: $a_{21}^* = 75\% \cdot a_{21} = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3$.
Ta cần giải bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (118, 52, 96)^T$ nhưng với ma trận hệ số đầu vào mới A^* xác định bởi:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Ta sử dụng đẳng thức: $X = A^* \cdot X + D$.

Bài tập 3.34: Xét mô hình Input-Output mở gồm ba ngành kinh tế với mtr hệ số đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử sản lượng của ba ngành lần lượt là 120, 100 và 150. Tìm tổng giá trị nguyên liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế.

Ta có: $x_1 = 120$, $x_2 = 100$ và $x_3 = 150$.

Cách 1: dùng các cột của mtr A .

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 1 là:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + a_{31}x_1 = (0,1 + 0,4 + 0,3).120 = 96 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 2 là:

$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + a_{32}x_2 = (0,2 + 0,1 + 0,2).100 = 50 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ba ngành cung cấp cho ngành 3 là:

$$a_{13}x_3 + a_{23}x_3 + a_{33}x_3 = (0,3 + 0,2 + 0,1).150 = 90 \text{ (đvt)}.$$

Vậy, tổng giá trị ng. liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế ba ngành là:

$$96 + 50 + 90 = 236 \text{ (đvt)}.$$

Cách 2: dùng các dòng của mtr A.

Giá trị nguyên liệu mà ngành 1 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,1.120 + 0,2.100 + 0,3.150 = 77 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,4.120 + 0,1.100 + 0,2.150 = 88 \text{ (đvt)}.$$

Giá trị nguyên liệu mà ngành 3 cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,3.120 + 0,2.100 + 0,1.150 = 71 \text{ (đvt)}.$$

Vậy, tổng giá trị ng. liệu mà ba ngành đã cung cấp cho nền kinh tế ba ngành là:

$$77 + 88 + 71 = 236 \text{ (đvt)}.$$

Bài tập 3.35: Trong mô hình Input-Output mở Leontief, cho biết mtr đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & m & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}.$$

1. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23} . Từ đó tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi giá trị đầu ra của ngành 3 là 200 (đơn vị tiền).
2. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{03} . Từ đó suy ra ngành mở phải đóng góp bao nhiêu cho ngành 3 khi giá trị sản lượng của ngành 3 là 1000 (đơn vị tiền).
3. Hãy tìm giá trị của m biết rằng ngành mở phải đóng góp 150 (đơn vị tiền) khi giá trị sản lượng của ngành 2 là 500 (đơn vị tiền).
4. Với $m = 0,4$ hãy tìm giá trị sản lượng của ba ngành nếu biết yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành lần lượt là 66, 124, 100.

1. Ta có: $a_{23} = 0,1$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành 2 cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,1 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

Ta cần tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 200$. Ta có sơ đồ:

$$a_{23} = 0,1 \text{ -----} > 1$$

$$? \text{ -----} > x_3 = 200.$$

Do đó, số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 200$ là:

$$a_{23}x_3 = 0,1.200 = 20 \text{ (đvt)}.$$

2. Ta có: $a_{03} = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,3) = 0,4$.

Ý nghĩa kinh tế: Ngành mở cung cấp cho ngành 3 lượng nguyên liệu trị giá 0,4 đvt để ngành 3 sản xuất ra lượng hàng hóa trị giá 1 đvt.

Ta cần tính số tiền mà ngành mở phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 1000$. Ta có sơ đồ:

$$a_{03} = 0,4 \text{ -----} > 1$$

$$? \text{ -----} > x_3 = 1000.$$

Do đó, số tiền mà ngành mở phải đóng góp cho ngành 3 khi $x_3 = 1000$ là:

$$a_{03}x_3 = 0,4.1000 = 400 \text{ (đvt)}.$$

3. Ta có sơ đồ:

$$a_{02} \text{ -----} > 1$$

$$150 \text{ -----} > x_2 = 500,$$

trong đó $a_{02} = 1 - (0,1 + m + 0,2) = 0,7 - m$.

Do đó, ta được: $a_{02} = 150/500 \Leftrightarrow 0,7 - m = 0,3 \Leftrightarrow m = 0,4$.

4. Bài toán cơ bản: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ biết $D = (d_1, d_2, d_3)^T = (66, 124, 100)^T$.

Bài tập 3.36: Trong mô hình Input-Output mở, cho biết mtr đầu vào $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$. Gọi

x_1 và x_2 lần lượt là giá trị sản lượng đầu ra của ngành 1 và 2; d_1 và d_2 lần lượt là yêu cầu của ngành mở đối với ngành 1 và 2. Khi đó, nếu $(x_1, x_2) = (200, 300)$ thì

A. $(d_1, d_2) = (70, 80)$;

B. $(d_1, d_2) = (120, 10)$;

C. $(d_1, d_2) = (10, 120)$;

D. $(d_1, d_2) = (80, 70)$.

Đề bài cho biết $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, hãy tìm d_1 và d_2 .

Ta sử dụng đẳng thức:

$$X = AX + D$$

$$\Leftrightarrow D = X - AX$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Vậy, ta chọn đáp án **A**.

Bài tập 3.37: Xét mô hình Input-Output mở gồm ba ngành với mtr hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử sản lượng của ba ngành lần lượt là 80, 100 và 60. Kiểm tra tính đúng hoặc sai của các đáp án sau:

- A.** Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 đã sử dụng để cung cấp cho ba ngành là 40;
- B.** Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là 10;
- C.** Giá trị sản lượng mà ba ngành cung cấp cho ngành mở lần lượt là 40, 50 và 28;
- D.** Các phát biểu trên đều đúng.

Ta có: $x_1 = 80$, $x_2 = 100$ và $x_3 = 60$.

- A.** Tổng giá trị nguyên liệu mà ngành 1 đã sử dụng để cung cấp cho ba ngành là:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,1.80 + 0,2.100 + 0,2.60 = 40.$$

- B.** Giá trị nguyên liệu mà ngành 2 cung cấp cho ngành 3 là:

$$a_{23}x_3 = 0,1.60 = 6.$$

- C.** Giá trị sản lượng mà ba ngành cung cấp cho ngành mở là?

Ta sử dụng đẳng thức:

$$\begin{aligned} X &= AX + D \\ \Leftrightarrow D &= X - AX \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 28 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy, các đáp án **A** và **C** là đúng và các đáp án **B** và **D** là sai.

IV. Giới hạn và liên tục của hàm một biến

Sinh viên tự đọc các nội dung sau đây trong tài liệu tham khảo (sách Bài tập các trang từ 99 đến 121).

- **Giới hạn của hàm một biến:** định nghĩa giới hạn, các tính chất của giới hạn, các giới hạn đặc biệt, giới hạn một bên, giới hạn vô cùng (vô hạn), giới hạn ở vô cùng, cách khử các dạng vô định.

- **Tính liên tục của hàm một biến:** định nghĩa tính liên tục và gián đoạn, các tính chất liên quan sự liên tục.

- Định nghĩa giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow x \text{ càng gần } x_0 \text{ thì } f(x) \text{ càng gần } L.$

Ví dụ 4.1: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5 \Leftrightarrow x \text{ càng gần } 1 \text{ thì } 2x + 3 \text{ càng gần } 5.$

Ví dụ 4.2: $\lim_{x \rightarrow 2} \sin(\pi x) = \sin(2\pi) = 0.$

Ví dụ 4.3: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} -1/x^4 = -\infty.$

Ví dụ 4.4: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(-3x + 4) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x - 2) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 5x - 2) = -\infty.$

- Các dạng vô định (DVB): $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$

Ví dụ 4.5: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 5x + 3} \text{ (DVB } \frac{0}{0})$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 3}$$

$$= \frac{1 - 2 + 2}{2 - 3} = -1.$$

* Dùng quy tắc l'Hospital (chương 5):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 5x + 3} \text{ (DVB } \frac{0}{0})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 4}{4x - 5} \\
&= \frac{3 - 6 + 4}{4 - 5} = -1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.6: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (DVTĐ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\
&= \frac{e^0}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.7: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (DVTĐ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \\
&= \frac{\cos 0}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.8: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 6x + 3}{-3x^2 + 4x - 2}$ (DVTĐ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{3} = \mp\infty.$$

• Giới hạn một bên:

+ Giới hạn bên trái: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 (x < x_0)} f(x) = L.$

+ Giới hạn bên phải: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 (x > x_0)} f(x) = L.$

* Định lý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$

Ví dụ 4.9: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = ?$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0 (x > 0)} \frac{x}{x} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0 (x < 0)} \frac{x}{-x} = -1.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\Rightarrow \text{không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

V. Phép tính vi phân và cực trị của hàm một biến

1. Đạo hàm và vi phân.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của a . Khi đó, ta ký hiệu:

$$\Delta x = x - a: \text{ số gia của biến số } x \text{ tại điểm } a,$$

$$\Delta y(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a): \text{ số gia của hàm số } f \text{ tại điểm } a.$$

Đạo hàm của hàm số tại a , ký hiệu $f'(a)$, được xác định bởi giới hạn hữu hạn sau đây:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Khi đó, ta nói hàm f **khả vi** (hay **có đạo hàm**) **tại điểm a** .

Lưu ý rằng tỷ số:

$$\frac{\Delta y(a)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

là tỷ số của các số gia. Do đó, **đạo hàm tại một điểm** là giới hạn của tỷ số của các số gia.

Một số ký hiệu khác để chỉ $f'(a)$:

$$y'(a), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}.$$

Để chỉ $f'(x)$, ta có thể dùng một trong các ký hiệu:

$$y', \frac{dy}{dx}.$$

Ví dụ 5.1: $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $a = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1 - (1^2 - 3 \cdot 1 + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) \\ &= 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Lưu ý: Dùng công thức đạo hàm, ta có $f'(x) = 2x - 3$. Do đó: $f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

Sinh viên tự đọc các nội dung sau đây trong tài liệu tham khảo (sách Bài tập các trang từ **122 đến 166**).

- Đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái, đạo hàm trong khoảng, đạo hàm trên đoạn.
- Các công thức tính đạo hàm của các hàm cơ bản, các quy tắc lấy đạo hàm cơ bản, mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục.
- Định nghĩa và các tính chất cơ bản của vi phân, ứng dụng của vi phân để tính gần đúng.
- Đạo hàm và vi phân cấp cao.
- Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số, các tiêu chuẩn dùng đạo hàm để xác định tính tăng (đồng biến), giảm (nghịch biến) của hàm số.
- Tính lõm lên (lõm), lõm xuống (lồi) và điểm uốn của hàm số, các tiêu chuẩn dùng đạo hàm cấp hai để xác định tính lõm lên và lõm xuống của hàm số.

Sinh viên không cần đọc các nội dung: công thức khai triển Taylor, công thức Mac-Laurin.

- Đạo hàm một bên:

Đạo hàm bên phải của hàm số $f(x)$ tại điểm a :

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\Delta y(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Đạo hàm bên trái của hàm số $f(x)$ tại điểm a :

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\Delta y(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

* **Định lý:** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $a \Leftrightarrow$ hàm số có đạo hàm bên trái, có đạo hàm bên phải tại a và $f'(a^-) = f'(a^+)$.

• Công thức vi phân: Cho hàm số $y = f(x)$. Vi phân của hàm số là:

$$dy = f'(x)dx.$$

Ví dụ 5.2: $y = x^4 + 3x - 2\sin x \Rightarrow dy = (4x^3 + 3 - 2\cos x)dx$.

$$z = 2^t + 5\ln t \Rightarrow dz = (2^t \cdot \ln 2 + 5/t)dt.$$

• Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng: Cho hàm số $y = f(x)$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Nếu $\Delta x \approx 0$ thì ta có công thức:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. (*)$$

Ví dụ 5.3: Tính xấp xỉ $\sqrt[3]{1,01}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$ và $\Delta x = 0,01$.

Ta có: $f(x_0 + \Delta x) = f(1,01) = \sqrt[3]{1,01}$, $f(x_0) = f(1) = 1$,

$$f'(x) = 1/3\sqrt[3]{x^2}, f'(x_0) = f'(1) = 1/3\sqrt[3]{1^2} = 1/3.$$

Do đó, thay vào (*) ta được:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1,01} &\approx 1 + (1/3) \cdot 0,01 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{1,01} &\approx 1,0033.\end{aligned}$$

• Vi phân cấp cao: Cho hàm số $y = f(x)$.

Vi phân cấp một của hàm số: $dy = f'(x)dx$.

Vi phân cấp hai của hàm số: $d^2y = f''(x)dx^2$.

Vi phân cấp n của hàm số: $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ 5.4: Cho hàm số $y = 3^x$. Ta có:

$$dy = 3^x \cdot \ln 3 \cdot dx, d^2y = 3^x \cdot (\ln 3)^2 \cdot dx^2, \dots, d^n y = 3^x \cdot (\ln 3)^n \cdot dx^n.$$

2. Tính giới hạn dạng vô định theo quy tắc l'Hospital.

• **Định lý:** Giả sử các hàm f và g khả vi trong một lân cận của điểm a (có thể không khả vi tại a) và liên tục tại a . Nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ hay } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$$

(tức là giới hạn khi $x \rightarrow a$ của thương số $f(x)/g(x)$ thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$) và giới hạn sau đây tồn tại (hữu hạn hay vô hạn):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

thì ta có:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ví dụ 5.5: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ (DVTĐ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (DVTĐ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0} \text{)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0} \text{)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 5.6: 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ (DVTĐ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ (DVTĐ } \frac{\infty}{\infty}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} \text{ (DVTĐ } \frac{\infty}{\infty}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.7: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) \text{ (DVTĐ } \infty - \infty)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \text{ (DVTĐ } 0 \cdot \infty) \text{ (lưu ý: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \text{ (DVTĐ } \frac{\infty}{\infty}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Bài tập 5.1: Cho hàm số $f(x) = \frac{e^{x+1} - x - 2}{x+1}$ khi $x \neq -1$ và $f(x) = m$ khi $x = -1$.

1. Xác định m để hàm số liên tục tại $x = -1$.
2. Tìm $f'(-1)$ với m vừa tìm được trong câu trên.

1. Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$. (*)

Ta có: $f(-1) = m$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - x - 2}{x+1} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{1} = \frac{e^0 - 1}{1} = 0.$$

Thay vào (*), ta được $m = 0$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có: } f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{e^{x+1} - x - 2}{x+1} - 0}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - x - 2}{(x+1)^2} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{2(x+1)} \text{ (DVTĐ } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài tập 5.2: Cho hàm $y = y(x)$ thỏa $\ln y + \frac{x}{y} = 1$ (*). Tính $y'(x)$.

Lấy đạo hàm hai vế của phtr (*) theo biến x , ta được:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} + \frac{y - x \cdot y'}{y^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow y' \cdot y + y - x \cdot y' &= 0 \\ \Leftrightarrow y'(y - x) &= -y \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{-y}{y - x} \text{ (MS } \neq 0). \end{aligned}$$

Bài tập 5.3: Cho hàm $y = y(x)$ thỏa $e^y + x \cdot y = e$ (1). Tính $y'(0)$.

Lấy đạo hàm hai vế của phtr (1) theo biến x , ta được:

$$\begin{aligned} y' \cdot e^y + y + x \cdot y' &= 0 \\ \Leftrightarrow y'(e^y + x) &= -y \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{-y}{e^y + x} \cdot (2) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta có: $e^{y(0)} + 0 \cdot y(0) = e \Leftrightarrow y(0) = 1$.

Thay $x = 0$ vào (2), ta được: $y'(0) = \frac{-y(0)}{e^{y(0)} + 0} = \frac{-1}{e^1} = -\frac{1}{e}$.

3. Cực trị địa phương - cực trị toàn cục.

3.1 Cực trị (địa phương).

Cho hàm f xác định tại mọi x gần a . Ta nói:

+ hàm f **đạt cực đại (địa phương) tại a** nếu và chỉ nếu tồn tại một lân cận V của a sao cho

$$f(x) \leq f(a), \text{ với mọi } x \in V;$$

+ hàm f **đạt cực tiểu (địa phương) tại a** nếu và chỉ nếu tồn tại một lân cận V của a sao cho

$$f(x) \geq f(a), \text{ với mọi } x \in V.$$

Cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

3.2 Cực trị toàn cục.

Cho hàm f xác định tại mọi x thuộc miền xác định D và $a \in D$. Ta nói:

+ hàm f **đạt cực đại toàn cục (đạt giá trị lớn nhất) trên D tại a** nếu và chỉ nếu

$$f(x) \leq f(a), \text{ với mọi } x \in D;$$

+ hàm f **đạt cực tiểu toàn cục (đạt giá trị nhỏ nhất) trên D tại a** nếu và chỉ nếu

$$f(x) \geq f(a), \text{ với mọi } x \in D.$$

Cực đại toàn cục và cực tiểu toàn cục được gọi chung là **cực trị toàn cục**.

Ký hiệu: $\max_{x \in D} f(x) = f(a)$ hay $\max_D f = f(a)$ (cực đại toàn cục),

$\min_{x \in D} f(x) = f(a)$ hay $\min_D f = f(a)$ (cực tiểu toàn cục).

• **Định lý (điều kiện cần của cực trị):** Nếu hàm số đạt cực trị tại a thì $f'(a) = 0$ hoặc $f'(a)$ không tồn tại.

• **Định nghĩa:** Cho điểm a thuộc miền xác định của hàm f . Nếu $f'(a) = 0$ hoặc $f'(a)$ không tồn tại thì ta nói a là **điểm tới hạn** của f .

• **Định lý (điều kiện đủ của cực trị dùng đạo hàm cấp một):** Giả sử hàm f liên tục trên khoảng mở D chứa điểm tới hạn a và f khả vi trên D (có thể không khả vi tại a). Khi đó:

1. nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua a thì f đạt cực đại tại a ,
2. nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua a thì f đạt cực tiểu tại a .

Ví dụ 5.8: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$.

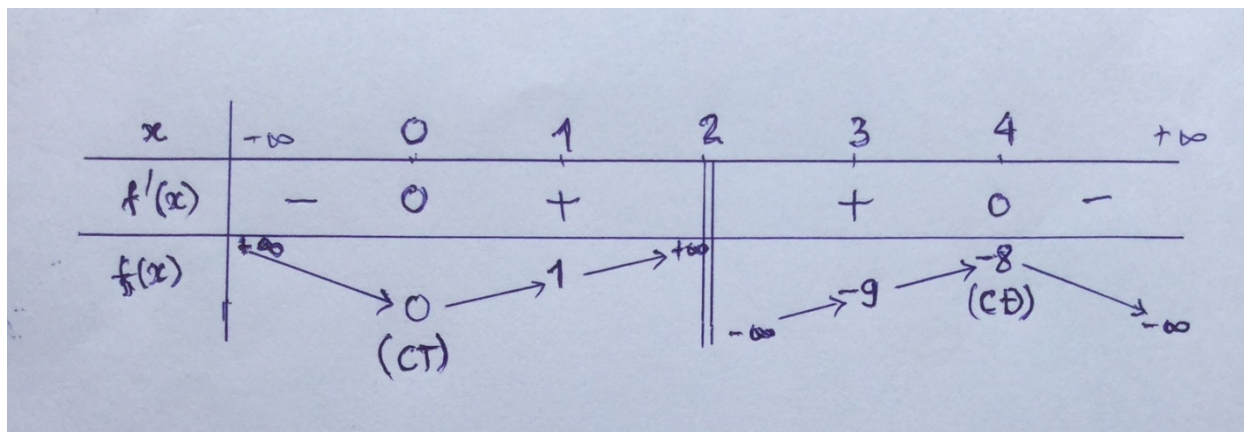
1. Tìm cực trị của hàm f .
2. Tìm cực trị toàn cục của hàm f lần lượt trên các miền $D = (-\infty, 1]$ và $E = [3, +\infty)$.

1. Miền xác định: $x \neq 2$.

$$* f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(2-x)^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

* Bảng biến thiên:



$$[f(0) = 0, f(1) = 1, f(3) = -9, f(4) = -8.]$$

Vậy, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $f_{CT} = f(0) = 0$;
hàm số đạt cực đại tại $x = 4$ và $f_{CD} = f(4) = -8$.

2. + Xét $D = (-\infty, 1]$ ($x \in D \Leftrightarrow -\infty < x \leq 1$).

Dựa vào bảng biến thiên với $-\infty < x \leq 1$, ta kết luận:

hsó đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên miền D tại $x = 0$ và $\min_{x \in D} f(x) = f(0) = 0$;

hsó không đạt cực đại toàn cục (không đạt gtln) trên miền D .

+ Xét $E = [3, +\infty)$ ($x \in E \Leftrightarrow 3 \leq x < +\infty$).

Dựa vào bảng biến thiên với $3 \leq x < +\infty$, ta kết luận:

hs đạt cực đại toàn cục (đạt gtln) trên miền E tại $x = 4$ và $\max_{x \in E} f(x) = f(4) = -8$;

hsó không đạt cực tiểu toàn cục (không đạt gtnn) trên miền E .

• **Cách tìm cực trị toàn cục của hàm f trên đoạn $[a, b]$:**

+ Tìm các điểm tới hạn của f .

+ Tính giá trị $f(x)$ tại các đầu mút a và b và tại các điểm tới hạn trong khoảng (a, b) .

+ Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của f trên đoạn $[a, b]$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong các giá trị tìm được ở trên.

Ví dụ 5.9: Tìm cực trị toàn cục của hàm số $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 50$ trên đoạn $[0, 5]$.

$$* f'(x) = 3x^2 - 10x - 8,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \in (0, 5) \\ x = -2/3 \notin (0, 5) \end{cases}.$$

$$* f(0) = 50, f(5) = 10, f(4) = 2.$$

Vậy, $\min_{x \in [0, 5]} f(x) = 2$ đạt được tại $x = 4$,

$\max_{x \in [0, 5]} f(x) = 50$ đạt được tại $x = 0$.

• **Định lý (điều kiện đủ của cực trị dùng đạo hàm cấp hai):** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong một khoảng mở D chứa a . Khi đó:

1. nếu $f'(a) = 0$ và $f''(a) > 0$ thì f đạt cực tiểu (địa phương) tại a ,
2. nếu $f'(a) = 0$ và $f''(a) < 0$ thì f đạt cực đại (địa phương) tại a ,
3. nếu $f'(a) = 0$ và $f''(x) > 0, \forall x \in D$ thì f đạt cực tiểu toàn cục trên D tại a ,
4. nếu $f'(a) = 0$ và $f''(x) < 0, \forall x \in D$ thì f đạt cực đại toàn cục trên D tại a .

Ví dụ 5.10: Tìm cực trị toàn cục của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ trên $(1, +\infty)$.

$$* f'(x) = 3x^2 - 6x - 9,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (1, +\infty) \\ x = -1 \notin (1, +\infty) \end{cases}.$$

$$* f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) > 0, \forall x \in (1, +\infty).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f'(3) = 0 \\ f''(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên miền $(1, +\infty)$ tại $x = 3$ và

$$\min_{x \in (1, +\infty)} f(x) = f(3) = -28.$$

Ví dụ 5.11: Hàm cầu của một sản phẩm có dạng:

$$P = \frac{80 - Q}{4} \text{ với } 0 \leq Q \leq 80,$$

trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán một sản phẩm. Tìm mức sản lượng để tối đa hóa doanh thu. Khi đó, doanh thu tối đa là bao nhiêu?

Ta cần tìm $Q \in [0, 80]$ sao cho hàm doanh thu

$$R = PQ = \frac{80Q - Q^2}{4}$$

đạt giá trị lớn nhất.

$$* R'(Q) = \frac{80 - 2Q}{4},$$

$$R'(Q) = 0 \Leftrightarrow 80 - 2Q = 0 \Leftrightarrow Q = 40 \in (0, 80).$$

$$* R(0) = 0, R(80) = 0, R(40) = 400.$$

Do đó, $\max_{Q \in [0, 80]} R(Q) = 400$ đạt được tại $Q = 40$.

Vậy, với mức sản lượng $Q = 40$, doanh thu đạt gtrị tối đa và doanh thu tối đa là 400.

Ví dụ 5.12: Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C = (Q^2/4) + 3Q + 400$, trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Tìm mức sản lượng để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất. Khi đó, chi phí trung bình tối thiểu là bao nhiêu?

Ta cần tìm $Q > 0$ sao cho chi phí trung bình

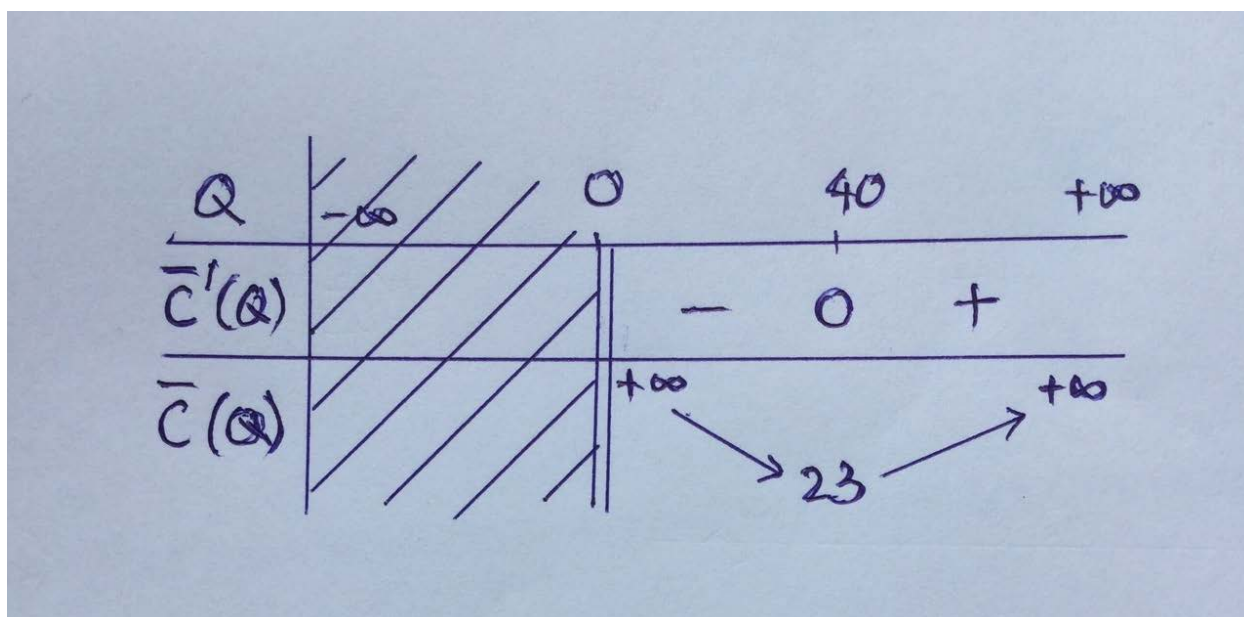
$$\bar{C} = \frac{C}{Q} = \frac{Q}{4} + 3 + \frac{400}{Q}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

$$* \bar{C}'(Q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{Q^2} = \frac{Q^2 - 1600}{4Q^2},$$

$$\bar{C}'(Q) = 0 \Leftrightarrow Q^2 - 1600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q = 40 > 0 \\ Q = -40 < 0 \end{cases}$$

+ **Cách 1:** Dùng bảng biến thiên.



$\Rightarrow$ hàm số $\bar{C}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền $Q > 0$ tại $Q = 40$ và

$$\min_{Q > 0} \bar{C}(Q) = \bar{C}(40) = 23.$$

+ **Cách 2:** Dùng đạo hàm cấp hai.

$$\bar{C}''(Q) = (-400).(-2).Q^{-3} = \frac{800}{Q^3} > 0, \forall Q > 0.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \bar{C}'(40) = 0 \\ \bar{C}''(Q) > 0, \forall Q > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số $\bar{C}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền $Q > 0$ tại $Q = 40$ và

$$\min_{Q>0} \bar{C}(Q) = \bar{C}(40) = 23.$$

Vậy, với mức sản lượng $Q = 40$, chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất. Khi đó, chi phí trung bình tối thiểu là 23.

Bài tập 5.4: Hàm cầu của một sản phẩm có dạng: $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình:

$$\bar{C} = 0,2Q + 4 + (400/Q),$$

trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\bar{C}$ được tính bằng đô trên mỗi đơn vị sản phẩm). Xác định lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa. Khi đó, xác định lợi nhuận tối đa và giá bán để đạt được lợi nhuận tối đa này.

Ta cần tìm $Q > 0$ sao cho lợi nhuận

$$\begin{aligned} \pi &= R - C = P.Q - \bar{C}.Q \\ &= (400 - 2Q).Q - 0,2Q^2 - 4Q - 400 \\ &= -2,2Q^2 + 396Q - 400 \end{aligned}$$

đạt giá trị lớn nhất.

Ta có hai cách giải tương tự như trong **Ví dụ 5.12**. Ta dùng **cách 2** (tức là dùng đạo hàm cấp hai).

$$* \pi' = -4,4Q + 396,$$

$$\pi' = 0 \Leftrightarrow -4,4Q + 396 = 0 \Leftrightarrow Q = 90.$$

$$* \pi'' = -4,4 < 0, \forall Q > 0.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \pi'(90) = 0 \\ \pi''(Q) < 0, \forall Q > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số π đạt giá trị lớn nhất trên miền $Q > 0$ tại $Q = 90$ và

$$\max_{Q>0} \pi = \pi(90) = 17420.$$

Vậy, với lượng sản phẩm bán ra $Q = 90$, lợi nhuận thu được tối đa. Khi đó, lợi nhuận tối đa là 17420 và giá bán để đạt được lợi nhuận tối đa này là $P = 400 - 2.90 = 220$.

4. Ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế.

4.1 Biên tế (biên).

- Trong kinh tế, khái niệm **biên tế** dùng để chỉ sự thay đổi của một biến kinh tế này được gây ra bởi sự thay đổi của một biến kinh tế khác.

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi. Khi đó, **biên tế của y tại x** là:

$$My(x) = y'(x) \left(= \frac{dy}{dx} \right).$$

Nhắc lại: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ có nghĩa là $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx L$.

$$\text{Ta có: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = My(x).$$

$$\text{Do đó: nếu } \Delta x \approx 0 \text{ thì } \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Vì thế: } \Delta x = 1 \Rightarrow \Delta y \approx \frac{dy}{dx} = My(x). \text{ Lưu ý: } \Delta y = f(x+1) - f(x).$$

Ý nghĩa: tại x , nếu biến số tăng 1 đơn vị thì sự thay đổi của hàm số xấp xỉ bằng đạo hàm dy/dx (hay biên tế $My(x)$).

Nói cách khác, **biên tế $My(x)$ (hay đạo hàm $dy/dx = y'(x)$) chính là sự thay đổi của hàm số (xấp xỉ) khi biến số tăng thêm 1 đơn vị (biến số thay đổi từ x đến $x+1$).**

Ví dụ 5.13: Cho hàm số $y = x^2 + 5$. Khi đó, tỉ số của sự thay đổi của y theo x xấp xỉ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = 2x \quad (= My(x)).$$

Khi $x = 100$ thì $dy/dx = 2 \cdot 100 = 200$. Do đó, $\Delta y/\Delta x \approx 200$.

Cho $\Delta x = 1$, ta được $\Delta y \approx 200$.

Nghĩa là tại $x = 100$, nếu biến số tăng thêm 1 đvị thì hàm số tăng thêm một lượng xấp xỉ 200 đvị.

Lưu ý: Ta có:

+ với $x = 100$ thì $y = 100^2 + 5 = 10005$,

+ với $x = 101$ thì $y = 101^2 + 5 = 10206$.

Do đó: $\Delta x = 1$ và $\Delta y = 10206 - 10005 = 201 \approx 200$.

Vì thế, tại $x = 100$, nếu biến số tăng thêm 1 đơn vị thì hàm số tăng thêm một lượng chính xác là 201 đơn vị (xấp xỉ 200 đơn vị).

4.2 Chi phí biên.

• Hàm tổng chi phí của một nhà sản xuất là $C = f(Q)$, trong đó Q là mức sản lượng của nhà sản xuất. Khi đó, **chi phí biên tại Q** (hay **biên tế của C tại Q**) là:

$$MC(Q) = \frac{dC}{dQ}.$$

Áp dụng lý thuyết tổng quát trong **phần 4.1** ở trên với $y = C$ và $x = Q$, ta được:

$$\text{nếu } \Delta Q \approx 0 \text{ thì } \frac{\Delta C}{\Delta Q} \approx \frac{dC}{dQ}.$$

Vì thế: $\Delta Q = 1 \Rightarrow \Delta C \approx \frac{dC}{dQ} = MC(Q)$. *Lưu ý:* $\Delta C = f(Q + 1) - f(Q)$.

Ý nghĩa: **chi phí biên là chi phí xấp xỉ của một đơn vị sản phẩm được tăng thêm.**
Cụ thể, **chi phí biên $MC(Q)$ chính là chi phí xấp xỉ của sản phẩm thứ $Q + 1$.**

Nói cách khác, **tại mức sản lượng Q , nếu nhà sản xuất làm thêm 1 đơn vị sản phẩm thì chi phí của nhà sản xuất tăng thêm xấp xỉ chi phí biên.**

Ví dụ 5.14: Cho hàm chi phí trung bình của một xí nghiệp là:

$$\bar{C} = 0,0001Q^2 - 0,02Q + 5 + \frac{5000}{Q}.$$

Ta có hàm chi phí:

$$C = \bar{C}.Q = 0,0001Q^3 - 0,02Q^2 + 5Q + 5000.$$

Do đó, hàm chi phí biên của xí nghiệp là:

$$MC(Q) = \frac{dC}{dQ} = 0,0003Q^2 - 0,04Q + 5.$$

Chi phí biên khi mức sản lượng là 50:

$$MC(50) = \left. \frac{dC}{dQ} \right|_{Q=50} = 0,0003.50^2 - 0,04.50 + 5 = 3,75.$$

Ý nghĩa kinh tế: chi phí sản xuất s. phẩm thứ 51 của xí nghiệp xấp xỉ 3,75 đ. vị tiền.

* Nếu dùng công thức xấp xỉ thì ta được:

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} \approx \left. \frac{dC}{dQ} \right|_{Q=50} = MC(50) = 3,75.$$

Vì thế: $\Delta Q = 1 \Rightarrow \Delta C \approx 3,75$.

Ý nghĩa kinh tế: tại $Q = 50$, nếu xí nghiệp sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm thì chi phí của xí nghiệp tăng thêm xấp xỉ 3,75 đơn vị tiền.

Lưu ý: Ta có:

$$+ \text{ với } Q = 50 \text{ thì } C = 0,0001.50^3 - 0,02.50^2 + 5.50 + 5000 = 5212,5;$$

$$+ \text{ với } Q = 51 \text{ thì } C = 0,0001.51^3 - 0,02.51^2 + 5.51 + 5000 = 5216,2451.$$

$$\text{Do đó: } \Delta Q = 1 \text{ và } \Delta C = 5216,2451 - 5212,5 = 3,7451 \approx 3,75.$$

Vì thế, tại $Q = 50$, nếu xí nghiệp sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm thì chi phí của xí nghiệp tăng thêm chính xác 3,7451 đơn vị tiền (xấp xỉ 3,75 đơn vị tiền).

4.3 Doanh thu biên.

- Hàm tổng doanh thu của một nhà sản xuất là $R = f(Q)$, trong đó Q là mức sản lượng của nhà sản xuất. Khi đó, **doanh thu biên tại Q** (hay **biên tế của R tại Q**) là:

$$MR(Q) = \frac{dR}{dQ}.$$

Áp dụng lý thuyết tổng quát trong **phần 4.1** ở trên với $y = R$ và $x = Q$, ta được:

$$\text{nếu } \Delta Q \approx 0 \text{ thì } \frac{\Delta R}{\Delta Q} \approx \frac{dR}{dQ}.$$

$$\text{Vì thế: } \Delta Q = 1 \Rightarrow \Delta R \approx \frac{dR}{dQ} = MR(Q). \text{ Lưu ý: } \Delta R = f(Q + 1) - f(Q).$$

Ý nghĩa: doanh thu biên là doanh thu xấp xỉ của một đơn vị sản phẩm được bán thêm. Cụ thể, doanh thu biên $MR(Q)$ chính là doanh thu x. xỉ của s. phẩm thứ $Q + 1$.

Nói cách khác, tại mức sản lượng Q , nếu nhà sản xuất bán thêm 1 đơn vị sản phẩm thì doanh thu của nhà sản xuất tăng thêm xấp xỉ doanh thu biên.

Ví dụ 5.15: Cho hàm cầu của sản phẩm của một xí nghiệp là $P = 1000/(Q + 5)$.

Ta có hàm doanh thu:

$$R = P \cdot Q = 1000Q/(Q + 5).$$

Do đó, hàm doanh thu biên của xí nghiệp là:

$$MR(Q) = \frac{dR}{dQ} = \frac{1000 \cdot (Q + 5) - 1000Q}{(Q + 5)^2} = \frac{5000}{(Q + 5)^2}.$$

Doanh thu biên khi mức sản lượng là 45:

$$MR(45) = \left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=45} = \frac{5000}{(45 + 5)^2} = 2.$$

Ý nghĩa kinh tế: doanh thu khi bán s. phẩm thứ 46 của xí nghiệp xấp xỉ 2 đ. vị tiền.

* Nếu dùng công thức xấp xỉ thì ta được:

$$\frac{\Delta R}{\Delta Q} \approx \left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=45} = MR(45) = 2.$$

Vì thế: $\Delta Q = 1 \Rightarrow \Delta R \approx 2$.

Ý nghĩa kinh tế: tại $Q = 45$, nếu xí nghiệp bán thêm 1 đơn vị sản phẩm thì doanh thu của xí nghiệp tăng thêm xấp xỉ 2 đơn vị tiền.

Lưu ý: Ta có:

+ với $Q = 45$ thì $R = 1000.45/(45 + 5) = 900$;

+ với $Q = 46$ thì $R = 1000.46/(46 + 5) = 901,96$.

Do đó: $\Delta Q = 1$ và $\Delta R = 901,96 - 900 = 1,96 \approx 2$.

Vì thế, tại $Q = 45$, nếu xí nghiệp bán thêm 1 đơn vị sản phẩm thì doanh thu của xí nghiệp tăng thêm chính xác 1,96 đơn vị tiền (xấp xỉ 2 đơn vị tiền).

4.4 Độ co giãn.

• Xét biến x thay đổi từ 100 đến 101. Ta có:

$\Delta x = 1$ (phụ thuộc đơn vị đo của x), tức là x tăng thêm 1 đơn vị.

Δx được gọi là **sự thay đổi tuyệt đối của x** .

$\Delta x/x = 1/100 = 1\%$ (không phụ thuộc đơn vị đo của x), tức là x tăng thêm 1%.

$\Delta x/x$ được gọi là **sự thay đổi tương đối của x** .

• Trong nhiều ứng dụng kinh tế, tốc độ thay đổi của một hàm số thường phụ thuộc vào đơn vị tính của biến độc lập x và biến phụ thuộc y . Để tránh điều này, khái niệm **độ co giãn** được các nhà kinh tế sử dụng.

Cho hàm số $y = y(x)$. Khi đó, **độ co giãn của y theo x** (đại lượng đặc trưng cho *tốc độ thay đổi tương đối* của y theo x) xác định bởi:

$$\varepsilon_{yx}(x) = \frac{dy/y}{dx/x} = y'(x) \frac{x}{y}.$$

Nếu $\Delta x \approx 0$ thì

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \approx \frac{dy/y}{dx/x} = \varepsilon_{yx}(x).$$

Vì thế: $\Delta x/x = 1\% \Rightarrow \Delta y/y \approx \varepsilon_{yx}(x)\%$.

Do đó tại x ,

nếu biến số tăng thêm 1% thì sự thay đổi của hàm số tính theo phần trăm xấp xỉ bằng $\varepsilon_{yx}(x)\%$.

• Lưu ý: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = My(x)$: tỉ số của sự thay đổi (tuyệt đối) của y theo x ,

$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \approx \frac{dy/y}{dx/x} = \varepsilon_{yx}(x)$: tỉ số của sự thay đổi (tương đối) của y theo x .

Ví dụ 5.16: Cho hàm số $y = 10 - 0,04x$. Tính độ co giãn của y theo x khi $x = 100$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Độ co giãn của y theo x là:

$$\varepsilon_{yx}(x) = \frac{dy/y}{dx/x} = y'(x) \frac{x}{y} = (-0,04) \cdot \frac{x}{10 - 0,04x}.$$

Do đó, độ co giãn của y theo x khi $x = 100$ là:

$$\varepsilon_{yx}(100) = (-0,04) \cdot \frac{100}{10 - 0,04 \cdot 100} = -0,667.$$

Ta có: $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \approx \varepsilon_{yx}(100) = -0,667$. (*)

Vì thế: $\Delta x/x = 1\% \Rightarrow \Delta y/y \approx -0,667\%$.

Ý nghĩa: tại $x = 100$, nếu biến số tăng 1% thì hàm số giảm xấp xỉ 0,667%.

• Tại $x = 100$, nếu biến số giảm 2% thì hàm số thay đổi thế nào?

Ta có: biến số giảm 2% $\Rightarrow \Delta x/x = -2\%$.

Do đó, từ (*) ta suy ra $\Delta y/y \approx (-0,667)(-2\%) = 1,334\%$.

Vậy, tại $x = 100$, nếu biến số giảm 2% thì hàm số tăng xấp xỉ 1,334%.

Ví dụ 5.17: Cho hàm cầu $Q = 1000 - 4P$. Tính độ co giãn của cầu theo giá khi $P = 200$ và giải thích ý nghĩa của kết quả nhận được.

Độ co giãn của cầu theo giá:

$$\varepsilon_{QP}(P) = \frac{dQ/Q}{dP/P} = Q'(P) \frac{P}{Q} = (-4) \cdot \frac{P}{1000 - 4P}.$$

Do đó, độ co giãn của cầu theo giá khi $P = 200$ là:

$$\varepsilon_{QP}(200) = (-4) \cdot \frac{200}{1000 - 4 \cdot 200} = -4.$$

$$\text{Ta có: } \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \approx \varepsilon_{QP}(200) = -4. (*)$$

Vì thế: $\Delta P/P = 1\% \Rightarrow \Delta Q/Q \approx -4\%$.

Ý nghĩa: tại mức giá $P = 200$, nếu giá tăng 1% thì lượng cầu giảm xấp xỉ 4%.

- *Tại mức giá $P = 200$, nếu giá giảm 0,5% thì lượng cầu thay đổi thế nào?*

Ta có: giá giảm 0,5% $\Rightarrow \Delta P/P = -0,5\%$.

Do đó, từ (*) ta suy ra $\Delta Q/Q \approx (-4)(-0,5\%) = 2\%$.

Vậy, tại mức giá $P = 200$, nếu giá giảm 0,5% thì lượng cầu tăng xấp xỉ 2%.

Bài tập 5.5: Cho hàm chi phí $C(Q) = 3Q^2 + 75Q - 36Q \ln Q + 135$ với Q là mức sản lượng.

1. Tính chi phí biên.
2. Tìm Q để chi phí trung bình $\bar{C}(Q) = C(Q)/Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. So sánh giá trị của chi phí biên và giá trị của chi phí trung bình khi $\bar{C}(Q)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 5.6: Giả sử một doanh nghiệp có hàm sản xuất là $Q(L) = 50L^{1/2}$, trong đó L là lượng lao động. Cho biết hàm lợi nhuận của doanh nghiệp là $\pi(L) = P \cdot Q - wL - 10$, trong đó $P = 4$ là đơn giá bán và $w = 5$ là giá lao động.

1. Tính $Q'(100)$ và giải thích ý nghĩa kinh tế.
2. Tìm L để doanh nghiệp này có lợi nhuận tốt nhất.

1. Ta có: $Q'(L) = 50 \cdot (1/2) \cdot L^{-1/2} = 25/\sqrt{L}$.

Do đó: $Q'(100) = 25/\sqrt{100} = 2,5$.

Mặt khác: $\frac{\Delta Q}{\Delta L} \approx Q'(100) = 2,5$.

Vì thế: $\Delta L = 1 \Rightarrow \Delta Q \approx 2,5$.

Ý nghĩa kinh tế: tại $L = 100$, nếu doanh nghiệp sử dụng thêm 1 đơn vị lao động thì mức sản lượng của doanh nghiệp tăng thêm xấp xỉ 2,5 đơn vị sản phẩm.

Bài tập 5.7: Một hãng có hàm lợi nhuận $\pi = P \cdot Q(L) - C(L)$ với P là đơn giá bán, $Q(L) = 100L^{1/2}$ là hàm sản xuất, $C(L) = 2500L + 1000$ là hàm chi phí và L là lượng lao động.

1. Khi $P = 200$, hãy tìm L để hãng này có lợi nhuận tối đa.
2. Khi lượng lao động tăng thêm 1% thì mức s.lượng của hãng tăng (giảm) bao nhiêu %?

2. Câu hỏi đề bài: $\Delta L/L = 1\% \Rightarrow \Delta Q/Q = ?$

Độ co giãn của Q theo L :

$$\varepsilon_{QL}(L) = Q'(L) \frac{L}{Q} = 100 \cdot (1/2) \cdot L^{-1/2} \cdot \frac{L}{100L^{1/2}} = 0,5.$$

Ta có:

$$\frac{\Delta Q/Q}{\Delta L/L} \approx \varepsilon_{QL}(L) = 0,5.$$

Vì thế: $\Delta L/L = 1\% \Rightarrow \Delta Q/Q \approx 0,5\%$.

Ý nghĩa: nếu lượng lao động tăng 1% thì mức sản lượng của hãng tăng x. xỉ 0,5%.

Bài tập 5.8: Một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm với mức sản lượng là Q . Gọi P là giá bán một đơn vị sản phẩm này. Biết rằng $Q = 1200 - P$. Hàm tổng chi phí của xí nghiệp này là

$$C(Q) = Q^2 + 200Q + 70000.$$

1. Tìm giá trị của Q sao cho doanh thu biên bằng chi phí biên.
2. Tính độ co giãn chi phí của xí nghiệp theo Q khi $P = 1000$ và g.th ý nghĩa kinh tế.

1. Ta có hàm doanh thu: $R = PQ = (1200 - Q)Q = 1200Q - Q^2$.

Doanh thu biên: $MR(Q) = R'(Q) = 1200 - 2Q$.

Chi phí biên: $MC(Q) = C'(Q) = 2Q + 200$.

Do đó: $MR(Q) = MC(Q) \Leftrightarrow 1200 - 2Q = 2Q + 200 \Leftrightarrow Q = 250$.

2. Ta có độ co giãn chi phí của xí nghiệp theo Q:

$$\varepsilon_{CQ}(Q) = C'(Q) \cdot \frac{Q}{C} = \frac{(2Q + 200)Q}{Q^2 + 200Q + 70000}.$$

Với $P = 1000$, ta được $Q = 1200 - 1000 = 200$.

Do đó, độ co giãn chi phí của xí nghiệp theo Q khi $P = 1000$:

$$\varepsilon_{CQ}(200) = \frac{(2 \cdot 200 + 200) \cdot 200}{200^2 + 200 \cdot 200 + 70000} = 0,8.$$

Ta có:

$$\frac{\Delta C/C}{\Delta Q/Q} \approx \varepsilon_{CQ}(200) = 0,8.$$

Vì thế: $\Delta Q/Q = 1\% \Rightarrow \Delta C/C \approx 0,8\%$.

Ý nghĩa: tại $Q = 200$, nếu mức sản lượng tăng 1% thì tổng chi phí của xí nghiệp tăng xấp xỉ 0,8%.

Bài tập 5.9: Giả sử hàm số $g(x)$ có đạo hàm và tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$. Đặt $f(x) = g(x^3 - 12x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng:

- A. f đạt cực đại địa phương tại -2 và đạt cực tiểu địa phương tại 2
- B. f đạt cực tiểu địa phương tại -2 và đạt cực đại địa phương tại 2
- C. f không đạt cực trị tại -2 và không đạt cực trị tại 2
- D. các câu trên đều sai.

Ta thấy: hàm số $g(x)$ có đạo hàm và tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow g'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. (*)$$

Xét $f(x) = g(x^3 - 12x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = g'(x^3 - 12x) \cdot (3x^2 - 12)$.

Bởi điều kiện (*), ta kết luận $g'(x^3 - 12x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ và dấu của $f'(x)$ là dấu của $3x^2 - 12$.

Từ đây, ta dễ dàng lập bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ để suy ra cực trị địa phương của $f(x)$. Kết quả ta chọn đáp án **A**.

Bài tập 5.10: Một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm với hàm chi phí $C(Q) = 0,5Q^2 + 10Q + 20$. Giả sử xí nghiệp bán sản phẩm với giá $P = 100$. Khi lợi nhuận xí nghiệp thu được là lớn nhất thì chi phí trung bình $C(Q)/Q$ là

- A. 90
- B. 56
- C. 55
- D. một kết quả khác.

Bài tập 5.11: Cho hàm chi phí $C(Q) = 10Q^2 + 20Q + 50$. Chọn câu đúng:

- A. độ co giãn của C theo Q tại $Q = 10$ là 220 và chi phí biên tại $Q = 10$ là 220
- B. chi phí biên tại $Q = 10$ là 220 và độ co giãn của C theo Q tại $Q = 10$ là 1,5%
- C. chi phí biên tại $Q = 10$ là 220 và độ co giãn của C theo Q tại $Q = 10$ là 1,76
- D. các câu trên đều sai.

Ta có độ co giãn của C theo Q :

$$\varepsilon_{CQ}(Q) = C'(Q) \cdot \frac{Q}{C} = (20Q + 20) \cdot \frac{Q}{10Q^2 + 20Q + 50}$$

và chi phí biên:

$$MC(Q) = C'(Q) = 20Q + 20.$$

Do đó, độ co giãn của C theo Q tại $Q = 10$ và chi phí biên tại $Q = 10$ lần lượt là:

$$\varepsilon_{CQ}(10) = \frac{(20 \cdot 10 + 20) \cdot 10}{10 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 50} = 1,76 \text{ và } MC(10) = 20 \cdot 10 + 20 = 220.$$

Vậy ta chọn đáp án **C**.

Bài tập 5.12: Cho hàm chi phí $C = Q^2 + 20Q + 100$ với Q là mức sản lượng. Cho biết độ co giãn của C theo Q tại Q_0 là $6/5$. Khi đó, chi phí biên tại Q_0 là

- A. 30
- B. 40
- C. 50
- D. 60.

Ta có độ co giãn của C theo Q:

$$\varepsilon_{CQ}(Q) = C'(Q) \cdot \frac{Q}{C} = (2Q + 20) \cdot \frac{Q}{Q^2 + 20Q + 100}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{CQ}(Q_0) = \frac{6}{5} &\Leftrightarrow \frac{(2Q_0 + 20)Q_0}{Q_0^2 + 20Q_0 + 100} = \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow 5(2Q_0 + 20)Q_0 = 6(Q_0^2 + 20Q_0 + 100) \\ &\Leftrightarrow 4Q_0^2 - 20Q_0 - 600 = 0.\end{aligned}$$

Giải phương trình này, ta được hai nghiệm $Q_0 = 15$ (nhận) hoặc $Q_0 = -10$ (loại).

Chi phí biên: $MC(Q) = C'(Q) = 2Q + 20$.

Do đó, chi phí biên tại Q_0 là: $MC(Q_0) = 2Q_0 + 20 = 2.15 + 20 = 50$.

Vậy ta chọn đáp án **C**.

Bài tập 5.13: Cho hàm chi phí $C = C(Q)$. Giả sử chi phí biên là $MC = 2Q + 20$ và tại $Q = 10$ thì $C = 350$. Khi đó:

A. $C = Q^2 + 20Q + 50$

B. $C = Q^2 + 20Q$

C. không tồn tại hàm $C = C(Q)$ thỏa yêu cầu

D. $C = 2Q + 330$.

Ta có: $MC = 2Q + 20$, tức là $dC/dQ = 2Q + 20$.

Do đó:

$$C = \int (dC / dQ) dQ = \int (2Q + 20) dQ = Q^2 + 20Q + K \text{ (với K là hằng số).}$$

Mặt khác: $Q = 10 \Rightarrow C = 350$.

Tức là: $350 = 10^2 + 20.10 + K$. Suy ra $K = 50$.

Vậy $C = Q^2 + 20Q + 50$. Ta chọn đáp án **A**.

* **Bài tập** liên quan đến các vấn đề của chương 5 trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: các trang từ 157 đến 166.

VI. Phép tính tích phân của hàm một biến

Sinh viên tự đọc các nội dung sau đây trong tài liệu tham khảo (sách Bài tập các trang từ 167 đến 200).

- **Nguyên hàm, tích phân bất định:** định nghĩa, sự tồn tại, các tính chất, các công thức cơ bản, các phương pháp tính tích phân bất định (đổi biến số, tích phân từng phần).
- **Tích phân xác định:** định nghĩa, các tính chất cơ bản, ý nghĩa hình học, công thức Newton-Leibnitz, các phương pháp tính tích phân xác định (đổi biến số, tích phân từng phần).

Sinh viên không cần đọc nội dung: **Tích phân suy rộng**.

- **Bài 1 trang 178:**

a) $I = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

Đổi biến số $t = \ln(\ln x)$. Ta có: $dt = \frac{1/x}{\ln x} dx = \frac{dx}{x \ln x}.$

Do đó: $I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C.$

b) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Hướng dẫn: thử đổi biến số $t = \sqrt{x^2-1}$ hoặc $t = 1/x$.

c) $I = \int \frac{e^{\sqrt{2x-1}} dx}{\sqrt{2x-1}}.$

Đổi biến số $t = \sqrt{2x-1}$. Khi đó: $t^2 = 2x-1$. Suy ra: $2tdt = 2dx$.

Do đó: $I = \int \frac{e^t \cdot t dt}{t} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sqrt{2x-1}} + C.$

d) $I = \int x^2(2-3x^2)^2 dx.$

Ta có: $I = \int x^2(2-3x^2)^2 dx = \int x^2(4-12x^2+9x^4) dx$

$$= \int (4x^2 - 12x^4 + 9x^6) dx = 4x^3/3 - 12x^5/5 + 9x^7/7 + C.$$

$$\text{e) } I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Hướng dẫn: Đổi biến số $t = \sqrt{x}$.

$$\text{f) } I = \int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4(2x) + 4}.$$

Hướng dẫn: $I = \int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4(2x) + 4} = \int \frac{2 \sin 2x \cos 2x dx}{\cos^4(2x) + 4}$. Đổi biến số $t = \cos^2 2x$.

$$\text{g) } I = \int \frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

Đổi biến số $t = 2x + 3$. Suy ra: $dt = 2dx$.

$$\text{Do đó: } I = \int \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(2x+3)} + C.$$

$$\text{h) } I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}.$$

Biến đổi: $I = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 9}$. Đổi biến số $t = x - 3$. Suy ra: $dt = dx$.

$$\text{Do đó: } I = \int \frac{dt}{t^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \arctg\left(\frac{t}{3}\right) + C = \frac{1}{3} \arctg\left(\frac{x-3}{3}\right) + C.$$

$$\text{i) } I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \int -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) dx = (-1/2) \cdot (\ln |x-1| - \ln |x-3|) + C.$$

• **Bài 2 trang 179:**

a) $I = \int x^2 e^{-2x} dx.$

Tích phân từng phần: $u = x^2$ và $dv = e^{-2x} dx$. Suy ra $du = 2x dx$ và $v = (-1/2)e^{-2x}$.

Do đó: $I = \int u dv = uv - \int v du = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx.$

Ta tính $J = \int x e^{-2x} dx$. Đặt: $u = x$ và $dv = e^{-2x} dx$. Suy ra $du = dx$ và $v = (-1/2)e^{-2x}$.

Do đó: $J = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) + C.$

Vậy: $I = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$

b) $I = \int e^{2x} \cos x dx.$

Hướng dẫn: Tích phân từng phần cho I : $u = e^{2x}$ và $dv = \cos x dx$,

ta đi đến tích phân $J = \int e^{2x} \sin x dx.$

Tiếp theo, tích phân từng phần cho J : $u = e^{2x}$ và $dv = \sin x dx$, ta sẽ được kết quả.

c) $I = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$

Tích phân từng phần: $u = \ln(\sin x)$ và $dv = dx/\sin^2 x$. Suy ra: $du = (\cos x/\sin x) dx$ và $v = -\cot x$.

Do đó: $I = \int u dv = uv - \int v du = -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int \cot x dx$

$$= -\cot x \cdot \ln(\sin x) + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= -\cot x \cdot \ln(\sin x) - \cot x - x + C.$$

d) $I = \int \frac{x^2 \arctg x}{x^2 + 1} dx.$

Hướng dẫn: $I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \arctg x dx = \int \arctg x dx - \int \frac{\arctg x dx}{x^2 + 1} = I_1 - I_2.$

Tính $I_1 = \int \arctg x dx$ bằng cách tích phân từng phần: $u = \arctg x$ và $dv = dx$.

Tính $I_2 = \int \frac{\arctg x dx}{x^2 + 1}$ bằng cách đổi biến số $t = \arctg x$.

• **Bài 1 trang 198:**

* Tính $I_1 = \int_0^2 |1-x| dx$.

Ta có: $I_1 = \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx$

$$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 -(1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(-x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1.$$

* Tính $I_2 = \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng cách giải tương tự **bài 1 câu i)** ở trong phần trước hoặc dùng công thức **13** trang **169** của sách Bài tập bìa vàng.

* Tính $I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng cách giải tương tự **bài 1 câu h)** ở trong phần trước.

* Tính $I_4 = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng cách giải tương tự **bài 1 câu i)** ở trong phần trước.

* Tính $I_5 = \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Đổi biến số $t = \sqrt{1+\ln x}$. Khi đó: $t^2 = 1 + \ln x$. Suy ra: $2tdt = dx/x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$ và $x = e^3 \Rightarrow t = 2$.

Do đó: $I_5 = \int_1^2 \frac{2t dt}{t} = \int_1^2 2 dt = 2t \Big|_1^2 = 2.$

* Tính $I_6 = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

Hướng dẫn: Đổi biến số $t = \ln x$.

* Tính $I_7 = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

Hướng dẫn: Đổi biến số $x = 3\sin t$ hoặc $x = 3\cos t$.

* Tính $I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Hướng dẫn: Đổi biến số $x = \tan t$.

* Tính $I_9 = \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$

Hướng dẫn: $I_9 = \int_{1/e}^1 |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = \int_{1/e}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx.$

Từ đây, ta dùng phương pháp tích phân từng phần: $u = \ln x$ và $dv = dx$.

* Tính $I_{10} = \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx.$

Hướng dẫn: Tích phân từng phần: $u = \arctan x$ và $dv = x dx$.

VII. Phương trình vi phân

1. Phương trình vi phân cấp một.

Phương trình vi phân (PTVP) cấp một là phương trình (phtr) có dạng:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hay } y' = \varphi(x, y). \quad (\text{I})$$

- Nếu thay $y = f(x)$ vào phtr (I) mà (I) trở thành đẳng thức đúng với mọi $x \in D$ (với $D \subset \mathbb{R}$) thì ta nói $y = f(x)$ là **nghiệm của PTVP (I) trên D**.

- **Nghiệm tổng quát** của PTVP (I) có dạng $y = f(x, C)$ (hay $\Phi(x, y, C) = 0$) với C là hằng số tùy ý. Nghiệm dạng $y = f(x, C_0)$, nhận được từ nghiệm tổng quát $y = f(x, C)$ với giá trị cụ thể $C = C_0$, được gọi là **nghiệm riêng** của PTVP (I).

1.1 PTVP tách biến (có biến phân ly).

- **Dạng:** $f(x)dx = g(y)dy$.

- **Cách giải:** Lấy tích phân hai vế của phtr trên, ta được:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy,$$

tức là:

$$F(x) = G(y) + C,$$

trong đó F (tương ứng, G) là một nguyên hàm của f (tương ứng, g) và C là hằng số bất kỳ.

Ví dụ 7.1: Giải PTVP $(3x^2 - x + 1)dx = \sin y dy$.

Lấy tích phân hai vế của phtr trên, ta được:

$$\int (3x^2 - x + 1)dx = \int \sin y dy$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2/2 + x = -\cos y + C.$$

Vậy, PTVP đã cho có nghiệm tổng quát là: $x^3 - x^2/2 + x = -\cos y + C$.

Ví dụ 7.2: Giải PTVP $x(y + 1)dx + (x - 1)ydy = 0$.

PTVP đã cho tương đương với: $x(y + 1)dx = -(x - 1)ydy$. (1)

+ Xét $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$: thỏa mãn phtr (1).

+ Xét $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$: thỏa mãn phtr (1).

+ Xét $x - 1 \neq 0$ và $y + 1 \neq 0$: phtr (1) tương đương với:

$$\frac{xdx}{x-1} = -\frac{ydy}{y+1}.$$

Lấy tích phân hai vế của phtr trên, ta được:

$$\int \frac{xdx}{x-1} = -\int \frac{ydy}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{(x-1)+1}{x-1} dx = -\int \frac{(y+1)-1}{y+1} dy$$

$$\Leftrightarrow \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy$$

$$\Leftrightarrow x + \ln |x-1| = -(y - \ln |y+1|) + C.$$

Vậy, PTVP đã cho có các nghiệm là:

$$x = 1; y = -1;$$

$$x + \ln |x-1| = -(y - \ln |y+1|) + C \text{ (với } x \neq 1 \text{ và } y \neq -1).$$

Ví dụ 7.3: Tìm nghiệm riêng của PTVP:

$$(1 + x^2)dy = xydx \quad (1)$$

thỏa điều kiện $y(1) = 2$.

+ Xét $y = 0$: thỏa PTVP (1) nhưng không thỏa điều kiện $y(1) = 2$.

(Lưu ý: điều kiện $y(1) = 2$ có nghĩa là $x = 1$ thì $y = 2$.)

+ Xét $y \neq 0$: PTVP (1) tương đương với:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$

Lấy tích phân hai vế của phtr trên, ta được:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x dx}{x^2 + 1}. \quad (2)$$

Ta tính tích phân ở vế phải của (2): $I = \int \frac{x dx}{x^2 + 1}$.

Đổi biến số $t = x^2 + 1$. Suy ra: $dt = 2x dx$.

Do đó: $I = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

Thay vào phtr (2), ta được:

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \quad (3)$$

Điều kiện: $y(1) = 2 \Leftrightarrow x = 1$ thì $y = 2$.

Thay $x = 1$ và $y = 2$ vào phtr (3), ta có đẳng thức đúng:

$$\ln |2| = \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) + C$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Vậy, nghiệm riêng của PTVP đã cho là:

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1) + \ln 2]$$

$$\Leftrightarrow 2\ln |y| = \ln[2(x^2 + 1)]$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2(x^2 + 1) \text{ (với } y \neq 0\text{)}.$$

1.2 PTVP tuyến tính cấp một.

• *Dạng:* $y' + P(x).y = Q(x), \quad (1)$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các hàm số liên tục trong một khoảng nào đó.

• *Cách giải:* Nhân hai vế của PTVP (1) với $e^{\int P(x)dx}$ ta được:

$$y' \cdot e^{\int P(x)dx} + P(x).y \cdot e^{\int P(x)dx} = Q(x).e^{\int P(x)dx}.$$

Phương trình trên tương đương với:

$$\left(y \cdot e^{\int P(x)dx} \right)' = Q(x).e^{\int P(x)dx}$$

tức là:

$$y \cdot e^{\int P(x)dx} = \int \left(Q(x).e^{\int P(x)dx} \right) dx + C.$$

Do đó:

$$y = \left[\int \left(Q(x).e^{\int P(x)dx} \right) dx + C \right] \cdot e^{-\int P(x)dx} \text{ (với } C \text{ là hằng số bất kỳ)}.$$

Ví dụ 7.4: Giải PTVP $y' - \frac{y}{x} = x^2$. (1)

Đây là PTVP tuyến tính cấp một dạng $y' + P(x).y = Q(x)$ với $P(x) = -1/x$ và $Q(x) = x^2$.

Ta có: $\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$.

Do đó: $e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

Nhân hai vế của PTVP (1) với $1/x$, ta được PTVP tương đương:

$$\begin{aligned}y' \cdot \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} &= x \\ \Leftrightarrow \left(y \cdot \frac{1}{x} \right)' &= x \\ \Leftrightarrow y \cdot \frac{1}{x} &= \int x dx \\ \Leftrightarrow y \cdot \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x^3 + Cx.\end{aligned}$$

Vậy, nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là: $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.

Ví dụ 7.5: Tìm nghiệm riêng của PTVP:

$$(x^2 + 1)y' + xy = -x \quad (1)$$

thỏa điều kiện $y(0) = 1$.

Chia hai vế của phtr (1) cho $x^2 + 1$, ta được PTVP tương đương:

$$y' + \frac{x}{x^2+1} \cdot y = \frac{-x}{x^2+1} \quad (2)$$

Phtr (2) là PTVP tt cấp một dạng $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ với $P(x) = \frac{x}{x^2+1}$ và $Q(x) = \frac{-x}{x^2+1}$.

Ta có: $\int P(x)dx = \int \frac{x dx}{x^2+1}$. Đổi biến số $t = x^2 + 1$. Suy ra: $dt = 2x dx$.

Do đó: $\int P(x)dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$

Vì thế: $e^{\int P(x)dx} = e^{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} = \left(e^{\ln(x^2 + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 1}.$

Nhân hai vế của phtr (2) với $\sqrt{x^2 + 1}$, ta được PTVP tương đương:

$$\begin{aligned} y' \cdot \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot y &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \Leftrightarrow \left(y \cdot \sqrt{x^2 + 1}\right)' &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \Leftrightarrow y \cdot \sqrt{x^2 + 1} &= \int \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Ta tính tích phân ở vế phải của (3): $I = \int \frac{-x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

Đổi biến số $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Khi đó: $t^2 = x^2 + 1$. Suy ra: $2t dt = 2x dx$.

Do đó: $I = \int \frac{-t dt}{t} = \int -dt = -t + C = -\sqrt{x^2 + 1} + C.$

Thay vào phtr (3), ta được:

$$\begin{aligned} y \cdot \sqrt{x^2 + 1} &= -\sqrt{x^2 + 1} + C \\ \Leftrightarrow y &= -1 + \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (4) \end{aligned}$$

Điều kiện: $y(0) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ thì $y = 1$.

Thay $x = 0$ và $y = 1$ vào phtr (4), ta có đẳng thức đúng:

$$1 = -1 + \frac{C}{\sqrt{0^2 + 1}} \Leftrightarrow C = 2.$$

Vậy, nghiệm riêng của PTVP đã cho là: $y = -1 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

Bài tập 7.1: Giải PTVP: $xy' + (x+1)y = x+1$. (1)

+ Xét $x = 0$: (1) $\Leftrightarrow y = 1$. Khi đó, ta có đồng thời $x = 0$ và $y = 1$. Đây là điều vô lý.

+ Xét $x \neq 0$: chia hai vế của phtr (1) cho x , ta được PTVP tương đương:

$$y' + \frac{x+1}{x}.y = \frac{x+1}{x}. \quad (2)$$

Phtr (2) là PTVP tt cấp một dạng $y' + P(x).y = Q(x)$ với $P(x) = \frac{x+1}{x}$ và $Q(x) = \frac{x+1}{x}$.

Ta có: $\int P(x)dx = \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln x$.

Do đó: $e^{\int P(x)dx} = e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = x \cdot e^x$.

Nhân hai vế của phtr (2) với xe^x , ta được PTVP tương đương:

$$\begin{aligned} y' \cdot xe^x + (x+1)e^x \cdot y &= (x+1)e^x \\ \Leftrightarrow (y \cdot xe^x)' &= (x+1)e^x \\ \Leftrightarrow y \cdot xe^x &= \int (x+1)e^x dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Ta tính tích phân ở vế phải của (3): $I = \int (x+1)e^x dx$.

Tích phân từng phần: $u = x + 1$ và $dv = e^x dx$. Suy ra: $du = dx$ và $v = e^x$.

Vì thế: $I = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$.

Thay vào phtr (3), ta được:

$$\begin{aligned} y \cdot xe^x &= xe^x + C \\ \Leftrightarrow y &= 1 + C/xe^x. \end{aligned}$$

Vậy, nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là: $y = 1 + C/xe^x$ (với $x \neq 0$).

Bài tập 7.2: Giả sử $y = f(x)$ là nghiệm của PTVP:

$$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x^3} \quad (1)$$

thỏa điều kiện $f(1) = 0$. Giá trị của $f(\sqrt{e})$ là

- A. $2e$ B. $1/(e^2 + 1)$ C. $1/e^2$ D. $1/2e$.

Phtr (1) là PTVP tt cấp một dạng $y' + P(x).y = Q(x)$ với $P(x) = \frac{2}{x}$ và $Q(x) = \frac{1}{x^3}$.

Ta có: $\int P(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x = \ln x^2$.

Do đó: $e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$.

Nhân hai vế của phtr (1) với x^2 , ta được PTVP tương đương:

$$y'.x^2 + 2xy = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow (y.x^2)' = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y.x^2 = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow y.x^2 = \ln |x| + C$$

$$\Leftrightarrow y = [\ln |x| + C]/x^2.$$

Tức là, $f(x) = [\ln |x| + C] / x^2$.

Ta có: $f(1) = 0 \Leftrightarrow [\ln |1| + C] / 1^2 = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Vì thế, $f(x) = [\ln |x|] / x^2$.

Vậy $f(\sqrt{e}) = [\ln |\sqrt{e}|] / e = 1/2e$. Ta chọn đáp án D.

Bài tập 7.3: Giả sử $y = f(x)$ là nghiệm của PTVP $y' - \frac{xy}{1+x^2} = 0$ thỏa điều kiện $f(0) = 1$.

Giá trị của $f(1)$ là:

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $1/\sqrt{2}$ D. một k.quả khác.

Bài tập 7.4: Giả sử $y = f(x)$ là nghiệm PTVP $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ thỏa điều kiện $f(\pi) = 1$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $1 + 2/\pi$

B. $-1 + 2/\pi$

C. $2/\pi$

D. $\pi/2$.

2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt.

• Dạng tổng quát: $y'' + ay' + by = f(x), (1)$

trong đó a và b là các hằng số và $f(x)$ là hàm số liên tục trong một khoảng nào đó.

• **Nghiệm tổng quát** của PTVP (1) có dạng $y = f(x, C_1, C_2)$ (hay $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$) với C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý.

Nghiệm dạng $y = f(x, C_1^0, C_2^0)$, nhận được từ nghiệm tổng quát $y = f(x, C_1, C_2)$ với các giá trị cụ thể $C_1 = C_1^0$ và $C_2 = C_2^0$, được gọi là **nghiệm riêng** của PTVP (1).

• **Định lý:** Xét PTVP **thuần nhất** tương ứng với phtr (1):

$$y'' + ay' + by = 0. (2)$$

Nếu $Y(x)$ là nghiệm tổng quát của phtr (2) và $u(x)$ là một nghiệm riêng của phtr (1) thì nghiệm tổng quát của phtr (1) có dạng:

$$y(x) = Y(x) + u(x).$$

• **Cách giải PTVP không thuần nhất:**

$$y'' + ay' + by = f(x). (1)$$

+ **B1.** Tìm nghiệm tổng quát $Y(x)$ của PTVP thuần nhất:

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (2)$$

+ **B2.** Tìm nghiệm riêng $u(x)$ của PTVP không thuần nhất (1) tùy thuộc vào dạng đặc biệt của vế phải $f(x)$.

+ **B3.** Kết luận nghiệm tổng quát của PTVP (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x).$$

• Cách tìm nghiệm tổng quát của phtr thuần nhất (2) trong B1.

Phương trình đặc trưng: $k^2 + ak + b = 0. \quad (*)$

TH 1. (*) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2$: nghiệm tổng quát của (2) là

$$Y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \text{ (với } C_1 \text{ và } C_2 \text{ là hai hằng số bất kỳ).}$$

TH 2. (*) có nghiệm kép k_0 : nghiệm tổng quát của (2) là

$$Y(x) = e^{k_0 x} (C_1 + C_2 x).$$

TH 3. (*) có hai nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$: nghiệm tổng quát của (2) là

$$Y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)].$$

• Cách tìm nghiệm riêng của phtr không thuần nhất (1) trong B2.

Ta tìm nghiệm riêng của phtr (1) tùy thuộc vào vế phải $f(x)$ có một trong các dạng đặc biệt sau đây.

TH 1. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ với α là hằng số và $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x .

a. Nếu α không phải là nghiệm của phtr đặc trưng thì (1) có nghiệm riêng dạng:

$$u(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x),$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x .

b. Nếu α là nghiệm đơn của phtr đặc trưng thì **(1)** có nghiệm riêng dạng:

$$u(x) = x e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$

c. Nếu α là nghiệm kép của phtr đặc trưng thì **(1)** có nghiệm riêng dạng:

$$u(x) = x^2 e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$

TH 2. $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)]$.

a. Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phtr đặc trưng thì **(1)** có nghiệm riêng dạng:

$$u(x) = e^{\alpha x} [R(x) \cdot \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x)],$$

trong đó $R(x)$ và $S(x)$ là các đa thức của x có bậc bằng $\max\{m; n\}$.

b. Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phtr đặc trưng thì **(1)** có nghiệm riêng dạng:

$$u(x) = x e^{\alpha x} [R(x) \cdot \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x)].$$

Ví dụ 7.6: Giải các PTVP sau đây.

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ hoặc } k = 3 \text{ (hai nghiệm thực phân biệt)}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là: $Y(x) = C_1 e^{1x} + C_2 e^{3x}$.

$$2. y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \text{ (nghiệm kép)}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là: $Y(x) = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

$$3. y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1 \pm 2i \text{ (hai nghiệm phức liên hợp)}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là: $Y(x) = e^{-1x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Ví dụ 7.7: Giải các PTVP sau đây.

$$1. y'' - 3y' + 2y = 1 + x. \quad (1)$$

+ **B1:** Tìm nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất: $y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (2)$

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ hoặc } k = 2.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP (2) là: $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

+ **B2:** Tìm nghiệm riêng của PTVP (1).

Vế phải của (1): $f(x) = 1 + x = e^{0x}(1 + x)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_1(x)$ với $\alpha = 0$ và $P_1(x) = 1 + x$ là đa thức bậc 1 của x .

Ta thấy $\alpha = 0$ không phải là nghiệm của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_1(x) = e^{0x}(ax + b) = ax + b$$

với a và b là các hằng số.

Ta có: $u'(x) = a, u''(x) = 0$.

Vì $u(x)$ là nghiệm của (1), ta suy ra:

$$\begin{aligned}u'' - 3u' + 2u &= 1 + x \\ \Leftrightarrow 0 - 3a + 2(ax + b) &= 1 + x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a &= 1/2 \text{ và } b = 5/4.\end{aligned}$$

Vì thế, $u(x) = x/2 + 5/4$.

+ **B3:** Kết luận nghiệm tổng quát của PTVP (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x/2 + 5/4.$$

$$2. \quad y'' - 4y' + 3y = e^x(2x - 1). \quad (1)$$

+ **B1:** Tìm nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất: $y'' - 4y' + 3y = 0$. (2)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ hoặc } k = 3.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP (2) là: $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

+ **B2:** Tìm nghiệm riêng của PTVP (1).

Vế phải của (1): $f(x) = e^{1x}(2x - 1)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_1(x)$ với $\alpha = 1$ và $P_1(x) = 2x - 1$ là đa thức bậc 1 của x .

Ta thấy $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_1(x) = x \cdot e^x \cdot (ax + b) = e^x(ax^2 + bx)$$

với a và b là các hằng số.

Ta có: $u'(x) = e^x(ax^2 + bx) + e^x(2ax + b) = e^x[ax^2 + (b + 2a)x + b]$,

$$u''(x) = e^x[ax^2 + (b + 2a)x + b] + e^x(2ax + b + 2a) = e^x[ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a].$$

Vì $u(x)$ là nghiệm của (1), ta suy ra:

$$\begin{aligned}u'' - 4u' + 3u &= e^x(2x - 1) \\ \Leftrightarrow e^x[ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a] - 4e^x[ax^2 + (b + 2a)x + b] + 3e^x(ax^2 + bx) &= e^x(2x - 1) \\ \Leftrightarrow ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a - 4[ax^2 + (b + 2a)x + b] + 3(ax^2 + bx) &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow (b + 4a - 4b - 8a + 3b)x + 2b + 2a - 4b &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = -1/2 \text{ và } b = 0. \end{aligned}$$

Vì thế, $u(x) = -(1/2)x^2e^x$.

+ **B3:** Kết luận nghiệm tổng quát của PTVP (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} - (1/2)x^2e^x.$$

Ví dụ 7.8: Giải PTVP $y'' + y' = 5\sin 2x$. (1)

+ **B1:** Tìm nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất: $y'' + y' = 0$. (2)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ hoặc } k = -1.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP (2) là: $Y(x) = C_1e^{0x} + C_2e^{-1x} = C_1 + C_2e^{-x}$.

+ **B2:** Tìm nghiệm riêng của PTVP (1).

Vế phải của (1): $f(x) = 5\sin 2x = e^{0x}(0.\cos 2x + 5.\sin 2x)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x}.[P_0(x).\cos(\beta x) + Q_0(x).\sin(\beta x)]$ với $\alpha = 0$, $\beta = 2$, và $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 5$ là các đa thức bậc 0 của x .

Ta thấy $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i$ không phải là nghiệm của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = e^{\alpha x}.[R_0(x).\cos(\beta x) + S_0(x).\sin(\beta x)] = e^{0x}.(a.\cos 2x + b.\sin 2x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

với a và b là các hằng số.

Ta có: $u'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$, $u''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$.

Vì $u(x)$ là nghiệm của (1), ta suy ra:

$$\begin{aligned}u'' + u' &= 5\sin 2x \\ \Leftrightarrow -4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 2a\sin 2x + 2b\cos 2x &= 5\sin 2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -2a - 4b = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = -1/2 \text{ và } b = -1. \end{aligned}$$

Vì thế, $u(x) = -(1/2)\cos 2x - \sin 2x$.

+ **B3:** Kết luận nghiệm tổng quát của PTVP (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1 + C_2e^{-x} - (1/2)\cos 2x - \sin 2x.$$

Bài tập 7.5: Giải các PTVP sau đây:

1. $y'' - 2y' + y = xe^x$;

2. $y'' + y = 3\cos x$.

Bài tập 7.6: Tìm nghiệm riêng của PTVP $y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x}$ thỏa các điều kiện $y(0) = 1$ và $y'(0) = 1$.

Bài tập 7.7: Xét PTVP $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}$. Khi đó, một nghiệm riêng của phtr có dạng:

A. $u(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$

B. $u(x) = e^{2x}x(ax^2 + bx + c)$

C. $u(x) = e^{2x}x^2(ax^2 + bx + c)$

D. $u(x) = e^xx^2(ax + b)$.

Xét PTVP $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}$. (1)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \text{ (nghiệm kép)}.$$

Vế phải của (1): $f(x) = x^2 e^{2x} = e^{2x} \cdot x^2$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_2(x)$ với $\alpha = 2$ và $P_2(x) = x^2$ là đa thức bậc 2 của x .

Ta thấy $\alpha = 2$ là nghiệm kép của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = x^2 \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_2(x) = x^2 \cdot e^{2x} \cdot (ax^2 + bx + c)$$

với a, b và c là các hằng số.

Vậy ta chọn đáp án **C**.

Bài tập 7.8: Xét PTVP $y'' + y' - 2y = e^x(2x + 1)$. Khi đó, một nghiệm riêng của phtr có dạng:

A. $u(x) = e^x(ax + b)$

B. $u(x) = e^x(ax^2 + bx)$

C. $u(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$

D. $u(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$.

Xét PTVP $y'' + y' - 2y = e^x(2x + 1)$. (1)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ hoặc } k = -2.$$

Vế phải của (1): $f(x) = e^x(2x + 1) = e^{1x} \cdot (2x + 1)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_1(x)$ với $\alpha = 1$ và $P_1(x) = 2x + 1$ là đa thức bậc 1 của x .

Ta thấy $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_1(x) = x \cdot e^x \cdot (ax + b)$$

với a và b là các hằng số.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

Bài tập 7.9: Xét PTVP $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$. Khi đó, một nghiệm riêng của phtr có dạng:

A. $u(x) = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$

B. $u(x) = axe^x \sin 2x$

C. $u(x) = e^x x (a \cos 2x + b \sin 2x)$

D. $u(x) = e^x (ax + b) \sin 2x$.

Xét PTVP $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$. (1)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm 2i \text{ (hai nghiệm phức liên hợp).}$$

Vế phải của (1): $f(x) = e^x \sin 2x = e^{1x}(0 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} [P_0(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_0(x) \cdot \sin(\beta x)]$ với $\alpha = 1$, $\beta = 2$, và $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ là các đa thức bậc 0 của x .

Ta thấy $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$ là nghiệm của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_0(x) \cdot \cos(\beta x) + S_0(x) \cdot \sin(\beta x)] = x \cdot e^x \cdot (a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x)$$

với a và b là các hằng số.

Vậy ta chọn đáp án **C**.

Bài tập 7.10: Xét PTVP $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$. Khi đó, một ngh riêng của phtr có dạng:

A. $u(x) = x(a \cos x + b \sin x)$

B. $u(x) = xe^{2x}(a \cos x + b \sin x)$

C. $u(x) = e^{2x}((a + b) \cos x + (cx + d) \sin x)$

D. $u(x) = x((a + b) \cos x + (cx + d) \sin x)$.

Xét PTVP $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$. (1)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \pm i \text{ (hai nghiệm phức liên hợp).}$$

Vế phải của (1): $f(x) = e^{2x}\sin x = e^{2x}(0.\cos x + 1.\sin x)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x}[P_0(x).\cos(\beta x) + Q_0(x).\sin(\beta x)]$ với $\alpha = 2$, $\beta = 1$, và $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ là các đa thức bậc 0 của x .

Ta thấy $\alpha \pm i\beta = 2 \pm i$ là nghiệm của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$u(x) = x.e^{\alpha x}.[R_0(x).\cos(\beta x) + S_0(x).\sin(\beta x)] = x.e^{2x}.(a.\cos x + b.\sin x)$$

với a và b là các hằng số.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

- **Định lý (nguyên lý chồng chất nghiệm):** Xét PTVP không thuần nhất

$$y'' + ay' + by = f(x). \quad (1)$$

Giả sử vế phải của phtr (1) có dạng $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ và $u_k(x)$ là ng nghiệm riêng của phtr:

$$y'' + ay' + by = f_k(x)$$

(với $k = 1, 2, \dots, n$). Khi đó, $u(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ là ng nghiệm riêng của phtr (1).

Ví dụ 7.9: Giải PTVP $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$. (1)

+ **B1:** Tìm nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất: $y'' - 2y' = 0$. (2)

Ta có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ hoặc } k = 2.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của PTVP (2) là: $Y(x) = C_1e^{0x} + C_2e^{2x} = C_1 + C_2e^{2x}$.

+ **B2:** Tìm nghiệm riêng của PTVP (1).

Vế phải của (1): $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Xét các PTVP có vế trái giống vế trái của (1) nhưng vế phải lần lượt là 1 và $\cos 2x$:

$$y'' - 2y' = 1, \quad (3)$$

$$y'' - 2y' = \cos 2x. \quad (4)$$

Khi đó, nếu $u_1(x)$ là một nghiệm riêng của (3) và $u_2(x)$ là một nghiệm riêng của (4) thì theo *nguyên lý chồng chất nghiệm*, ta kết luận $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ là một nghiệm riêng của (1).

* Tìm nghiệm riêng của PTVP (3).

Vế phải của (3): $f(x) = 1 = e^{0x} \cdot 1$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_0(x)$ với $\alpha = 0$ và $P_0(x) = 1$ là đa thức bậc 0 của x .

Ta thấy $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (3) có dạng:

$$u_1(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_0(x) = x \cdot e^{0x} \cdot a = ax$$

với a hằng số.

Ta có: $u_1'(x) = a$, $u_1''(x) = 0$.

Vì $u_1(x)$ là nghiệm của (3), ta suy ra:

$$u_1'' - 2u_1' = 1$$

$$\Leftrightarrow 0 - 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = -1/2.$$

Vì thế, $u_1(x) = -x/2$.

* Tìm nghiệm riêng của PTVP (4).

Vế phải của (4): $f(x) = \cos 2x = e^{0x}(1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x)$

có dạng $f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_0(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_0(x) \cdot \sin(\beta x)]$ với $\alpha = 0$, $\beta = 2$, và $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$ là các đa thức bậc 0 của x .

Ta thấy $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i$ không phải là nghiệm của phtr đặc trưng.

Do đó, nghiệm riêng của (4) có dạng:

$$u_2(x) = e^{\alpha x} \cdot [R_0(x) \cdot \cos(\beta x) + S_0(x) \cdot \sin(\beta x)] = e^{0x} \cdot (b \cdot \cos 2x + c \cdot \sin 2x) = b \cos 2x + c \sin 2x$$

với b và c là các hằng số.

Ta có: $u_2'(x) = -2b \sin 2x + 2c \cos 2x$, $u_2''(x) = -4b \cos 2x - 4c \sin 2x$.

Vì $u_2(x)$ là nghiệm của (4), ta suy ra:

$$\begin{aligned} u_2'' - 2u_2' &= \cos 2x \\ \Leftrightarrow -4b \cos 2x - 4c \sin 2x + 4b \sin 2x - 4c \cos 2x &= \cos 2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4b - 4c = 1 \\ -4c + 4b = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow b = -1/8 \text{ và } c = -1/8. \end{aligned}$$

Vì thế, $u_2(x) = -(1/8) \cos 2x - (1/8) \sin 2x$.

Vậy nghiệm riêng của (1) là $u(x) = u_1(x) + u_2(x) = -x/2 - (1/8) \cos 2x - (1/8) \sin 2x$.

+ **B3:** Kết luận nghiệm tổng quát của PTVP (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - x/2 - (1/8) \cos 2x - (1/8) \sin 2x.$$

Bài tập 7.11: Ta đã biết độ co dãn của cầu theo giá là

$$\varepsilon_{QP} = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q},$$

trong đó P là giá bán và Q là lượng cầu tương ứng. Cho biết $\varepsilon = (-4P^2 - 12P)/Q$ và lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 300. Tìm phương trình hàm cầu.

Ta có:

$$\varepsilon = (-4P^2 - 12P)/Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{-4P^2 - 12P}{Q}$$

$$\Leftrightarrow dQ = (-4P - 12)dP.$$

Lấy tích phân hai vế của phtr trên, ta được:

$$\int dQ = \int (-4P - 12)dP$$

$$\Leftrightarrow Q = -2P^2 - 12P + K \text{ (với } K \text{ là hằng số).}$$

Giả thiết: lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 300, có nghĩa là $P = 10$ thì $Q = 300$.

Do đó: $300 = -2 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + K$. Suy ra $K = 620$.

Vậy phương trình hàm cầu là $Q = -2P^2 - 12P + 620$.

Bài tập 7.12: Một xí nghiệp sản xuất một loại hàng hóa và có hàm chi phí biên là

$$MC(Q) = 0,03Q^2 - 4Q + 200,$$

trong đó Q là mức sản lượng. Biết rằng nếu $Q = 10$ thì chi phí của xí nghiệp là $C = 2000$.
Tìm hàm chi phí của xí nghiệp này.

* **Bài tập** liên quan đến giải phương trình vi phân trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: các trang 233 và từ 244 đến 247.

VIII. Đạo hàm riêng và cực trị của hàm nhiều biến

1. Miền xác định của hàm nhiều biến.

Không gian: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Không gian: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

Không gian: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Cho tập khác rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ f đi từ D vào $\mathbb{R}$ được gọi là **hàm n biến**.
Ký hiệu:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ với } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mapsto u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Tập D được gọi là **tập xác định** của hàm f .

Thông thường, hàm n biến được cho bằng công thức $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Khi đó, tập xác định của hàm số này là

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ có nghĩa}\}.$$

Ví dụ 8.1: 1. Hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}^2$.

2. Hàm số $u = f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ có tập xác định là

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

3. Hàm doanh thu $R = f(Q_1, Q_2) = 100Q_1 + 50Q_2$, với Q_1 và Q_2 lần lượt là sản phẩm loại I và loại II, có tập xác định

$$D = \{(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 : Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0\}.$$

2. Đạo hàm riêng.

- **Định nghĩa:** Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định tại mọi (x, y) gần điểm cố định (a, b) .

+ **Đạo hàm riêng của hàm số** $z = f(x, y)$ **theo biến x tại (a, b)** , ký hiệu $f'_x(a, b)$, được xác định bởi giới hạn hữu hạn sau đây:

$$f'_x(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}.$$

+ **Đạo hàm riêng của hàm số** $z = f(x, y)$ **theo biến y tại (a, b)** , ký hiệu $f'_y(a, b)$, được xác định bởi giới hạn hữu hạn sau đây:

$$f'_y(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}.$$

Một số ký hiệu khác để chỉ $f'_x(a, b)$: $z'_x(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(a, b)$.

Để chỉ $f'_x(x, y)$, ta có thể dùng một trong các ký hiệu: f'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$.

• **Nhận xét:** Để tính f'_x , ta xem y như hằng số và tính đạo hàm theo biến x như bình thường.

Để tính f'_y , ta xem x như hằng số và tính đạo hàm theo biến y như bình thường.

Ví dụ 8.2: Cho hàm $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$. Tính f'_x , f'_y , $f'_x(1, 2)$ và $f'_y(2, -1)$.

Ta có:

$$f'_x = 3x^2y - 4xy^2 + y^3,$$

$$f'_y = x^3 - 4x^2y + 3xy^2,$$

$$f'_x(1, 2) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3 = -2,$$

$$f'_y(2, -1) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 = 30.$$

• Một cách tương tự, ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng cho các hàm số có nhiều hơn hai biến.

Ví dụ 8.3: Cho hàm $u = 2x^2yz - xy^2z^3 + 3yz^2$. Tính $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ và $\frac{\partial u}{\partial y}(2, 1, -1)$.

Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xyz - y^2z^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2z - 2xyz^3 + 3z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2y - 3xy^2z^2 + 6yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,1,-1) = 2.2^2.(-1) - 2.2.1.(-1)^3 + 3(-1)^2 = -1.$$

3. Đạo hàm riêng cấp cao.

• **Định nghĩa:** Cho hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một: z'_x và z'_y . Khi đó, các đạo hàm riêng của z'_x và z'_y được gọi là các **đạo hàm riêng cấp hai** của hàm z . Ký hiệu:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \text{ hay } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y \text{ hay } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ hay } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x \text{ hay } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Tương tự, ta có thể định nghĩa các **đạo hàm riêng cấp cao hơn cấp hai** của hàm z .

Ví dụ 8.4: Cho hàm $z = 2x^2y + xy^3 - e^{xy}$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của z .

Ta có:

$$z'_x = 4xy + y^3 - ye^{xy}, \quad [\text{giải thích: } (e^{xy})'_x = (xy)'_x \cdot e^{xy} = y \cdot e^{xy}]$$

$$z'_y = 2x^2 + 3xy^2 - xe^{xy}, \quad [\text{gth: } (e^{xy})'_y = (xy)'_y \cdot e^{xy} = x \cdot e^{xy}]$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 4y - y \cdot ye^{xy} = 4y - y^2e^{xy}, \quad [\text{gth: } (ye^{xy})'_x = y \cdot (e^{xy})'_x = y \cdot y \cdot e^{xy}]$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = 6xy - x \cdot xe^{xy} = 6xy - x^2e^{xy}, \quad [\text{gth: } (xe^{xy})'_y = x \cdot (e^{xy})'_y = x \cdot x \cdot e^{xy}]$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 4x + 3y^2 - e^{xy} - y \cdot xe^{xy} = 4x + 3y^2 - (1 + xy)e^{xy},$$

$$[\text{gth: } (ye^{xy})'_y = 1 \cdot e^{xy} + y \cdot (e^{xy})'_y = e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy}]$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = 4x + 3y^2 - e^{xy} - x \cdot ye^{xy} = 4x + 3y^2 - (1 + xy)e^{xy}.$$

$$[\text{gth: } (xe^{xy})'_x = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot (e^{xy})'_x = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}]$$

Do đó $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Ví dụ 8.5: Cho hàm $u = z^2(3x^2 - 4xy^3)$. Tính $u'''_{xyz}(1, 2, 3)$.

Ta có: $u = 3x^2z^2 - 4xy^3z^2$. Do đó:

$$u'_x = 6xz^2 - 4y^3z^2,$$

$$(u'_x)'_y = -12y^2z^2,$$

$$u'''_{xyz} = [(u'_x)'_y]'_z = -24y^2z,$$

$$u'''_{xyz}(1, 2, 3) = -24 \cdot 2^2 \cdot 3 = -288.$$

- **Định lý:** Nếu hàm f theo n biến có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục trong một lân cận của điểm M thì đạo hàm hỗn hợp cấp n tùy ý tại điểm M không phụ thuộc vào thứ tự của các biến được lấy đạo hàm riêng.

4. Đạo hàm riêng của hàm hợp.

- Cho hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục theo biến x và y ; $x = x(r, s)$ và $y = y(r, s)$ là các hàm số có các đạo hàm riêng liên tục theo biến r và s . Khi đó, hàm số hợp $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{r}, \mathbf{s}), \mathbf{y}(\mathbf{r}, \mathbf{s})) = \mathbf{z}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ có các đạo hàm riêng theo biến r và s . Hơn nữa, ta có:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}}.$$

- Đặc biệt, với $z = f(x, y)$ sao cho $x = x(t)$ và $y = y(t)$ ta có $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t})) = \mathbf{z}(\mathbf{t})$ và

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

Ví dụ 8.6: Cho hàm $z = 2x^3y^2 + xy^3$, $x = r^2s$ và $y = rs$. Tính $\partial z/\partial r$ và $\partial z/\partial s$.

Ví dụ 8.7: Cho hàm $z = \ln(x + 2y)$, $x = 3t^2 - t$ và $y = t^{3/2}$. Tính dz/dt .

Bài tập 8.1: Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

1. $f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2)$,

2. $f(x, y) = e^{2xy}$.

1. $f'_x = \frac{(2x^2 + y^2)'_x}{2x^2 + y^2} = \frac{4x}{2x^2 + y^2}$,

$f'_y = \frac{(2x^2 + y^2)'_y}{2x^2 + y^2} = \frac{2y}{2x^2 + y^2}$,

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \left(\frac{4x}{2x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{4 \cdot (2x^2 + y^2) - 4x \cdot 4x}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{-8x^2 + 4y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$,

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(\frac{4x}{2x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{0 \cdot (2x^2 + y^2) - 4x \cdot 2y}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{-8xy}{(2x^2 + y^2)^2}$, $f''_{yx} = f''_{xy}$,

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = \left(\frac{2y}{2x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{2 \cdot (2x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2 - 2y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$.

2. $f'_x = (e^{2xy})'_x = (2xy)'_x \cdot e^{2xy} = 2ye^{2xy}$,

$f'_y = (e^{2xy})'_y = (2xy)'_y \cdot e^{2xy} = 2xe^{2xy}$,

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (2ye^{2xy})'_x = 2y \cdot (e^{2xy})'_x = 2y \cdot 2ye^{2xy} = 4y^2e^{2xy}$,

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (2ye^{2xy})'_y = 2 \cdot e^{2xy} + 2y \cdot (e^{2xy})'_y = 2e^{2xy} + 2y \cdot 2x \cdot e^{2xy} = (2 + 4xy)e^{2xy}$,

$f''_{yx} = f''_{xy}$,

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (2xe^{2xy})'_y = 2x \cdot (e^{2xy})'_y = 2x \cdot 2xe^{2xy} = 4x^2e^{2xy}$.

5. Vi phân cấp một và cấp hai.

• Cho hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục. Khi đó, **vi phân (toàn phần) cấp một** của hàm z là:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

• Cho hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục. Khi đó, *vi phân cấp hai* của hàm z là:

$$d^2z = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2.$$

Ví dụ 8.8: Cho hàm $z = 4x^2y + xy^3 - 3xy$. Tính dz và d^2z .

Ta có:

$$z'_x = 8xy + y^3 - 3y,$$

$$z'_y = 4x^2 + 3xy^2 - 3x,$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 8y,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = 6xy,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 8x + 3y^2 - 3.$$

$$\text{Do đó: } dz = z'_x dx + z'_y dy = (8xy + y^3 - 3y)dx + (4x^2 + 3xy^2 - 3x)dy,$$

$$\begin{aligned} d^2z &= z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 \\ &= 8y dx^2 + 2(8x + 3y^2 - 3) dx dy + 6xy dy^2. \end{aligned}$$

Bài tập 8.2: Tìm vi phân toàn phần của hàm số: $f(x, y) = \ln(5 + x^8 y^3)$.

$$\text{Ta có: } f'_x = \frac{(5 + x^8 y^3)'_x}{5 + x^8 y^3} = \frac{8x^7 y^3}{5 + x^8 y^3},$$

$$f'_y = \frac{(5 + x^8 y^3)'_y}{5 + x^8 y^3} = \frac{3x^8 y^2}{5 + x^8 y^3}.$$

$$\text{Do đó: } df = f'_x dx + f'_y dy = \frac{8x^7 y^3}{5 + x^8 y^3} dx + \frac{3x^8 y^2}{5 + x^8 y^3} dy.$$

Bài tập 8.3: Tìm vi phân cấp một và cấp hai của hàm số: $z = x^4 e^{2y}$.

Ta có:

$$z'_x = 4x^3e^{2y},$$

$$z'_y = 2x^4e^{2y},$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 12x^2e^{2y},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = 4x^4e^{2y},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 8x^3e^{2y}.$$

$$\text{Do đó: } dz = z'_x dx + z'_y dy = 4x^3e^{2y}dx + 2x^4e^{2y}dy,$$

$$\begin{aligned} d^2z &= z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 \\ &= 12x^2e^{2y}dx^2 + 16x^3e^{2y}dx dy + 4x^4e^{2y}dy^2. \end{aligned}$$

Bài tập 8.4: Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$1. f(x, y) = x + y - 3\sqrt[3]{xy} \text{ tại } (1, 8),$$

$$2. f(x, y) = x^{\sqrt{y}} \text{ tại } (1, 4).$$

Bài tập 8.5: Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

$$1. f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2),$$

$$2. f(x, y) = e^{4xy}.$$

6. *Cực trị của hàm hai biến.*

6.1 Cực trị (địa phương).

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định tại mọi (x, y) gần (a, b) . Ta nói:

+ hàm f **đạt cực đại (địa phương) tại (a, b)** nếu với mọi (x, y) đủ gần (a, b) ta có:

$$f(x, y) \leq f(a, b),$$

+ hàm f **đạt cực tiểu (địa phương) tại (a, b)** nếu với mọi (x, y) đủ gần (a, b) ta có:

$$f(x, y) \geq f(a, b).$$

Cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Ví dụ 8.9: 1. Hàm $z = x^2 + 2y^2$ đạt cực tiểu tại $(0, 0)$.

2. Hàm $z = xy$ không đạt cực tiểu và không đạt cực đại tại $(0, 0)$.

• **Định lý (điều kiện cần của cực trị):** Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại (a, b) và f có các đạo hàm riêng tại (a, b) thì

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ và } f'_y(a, b) = 0.$$

Điểm (a, b) sao cho $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ được gọi là **điểm dừng** của hàm $z = f(x, y)$.

• **Định lý (điều kiện đủ của cực trị):** Cho hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại mọi điểm (x, y) gần điểm dừng (a, b) . Xét **ma trận Hesse**:

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

và đặt $H_1 = f''_{xx}(a, b)$ và $H_2 = |H(a, b)|$. Khi đó, ta có:

1. nếu $H_1 < 0$ và $H_2 > 0$ thì f đạt cực đại tại (a, b) ,
2. nếu $H_1 > 0$ và $H_2 > 0$ thì f đạt cực tiểu tại (a, b) ,
3. nếu $H_2 < 0$ thì f không đạt cực trị tại (a, b) (ta nói (a, b) là **điểm yên ngựa** của f),
4. nếu $H_2 = 0$ thì ta chưa thể kết luận được gì về cực trị tại (a, b) mà cần phải xét thêm.

Ví dụ 8.10: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $z = -x^2 - 2y^2 + 4x + 1,$

2. $z = x^3 + y^3 - 3xy,$

3. $z = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y} + 2.$

1. $z = -x^2 - 2y^2 + 4x + 1.$

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có một điểm dừng: (2, 0).

$$* z''_{xx} = -2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = -4.$$

$$+ \text{Tại } (2, 0), \text{ ta có: } H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} H_1 = -2 < 0 \\ H_2 = |H| = (-2) \cdot (-4) - 0 \cdot 0 = 8 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại (2, 0).

$$2. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3(x^2)^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có hai điểm dừng: (0, 0) và (1, 1).

$$* z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = -3, z''_{yy} = 6y.$$

$$+ \text{Tại } (0, 0), \text{ ta có: } H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = |H| = -9 < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại (0, 0).

+ Tại (1, 1), ta có: $H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} H_1 = 6 > 0 \\ H_2 = |H| = 6 \cdot 6 - (-3) \cdot (-3) = 27 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại (1, 1).

3. $z = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y} + 2$. (Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.)

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{2y}{4x} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 2y^3 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4(y^3/2)^2 \\ x = y^3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = y^6 \\ x = y^3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(y^4 - 1) = 0 \\ x = y^3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = y^3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có hai điểm dừng: (1/2, 1) và (-1/2, -1).

$$* z''_{xx} = -\frac{y^2}{4} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{2y}{4x^2} = -\frac{y}{2x^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{2}{4x} - (-2)y^{-3} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y^3}.$$

+ Tại (1/2, 1), ta có: $H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} H_1 = 4 > 0 \\ H_2 = |H| = 12 - 4 = 8 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại (1/2, 1).

+ Tại $(-1/2, -1)$, ta có: $H = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} H_1 = -4 < 0 \\ H_2 = |H| = 12 - 4 = 8 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $(-1/2, -1)$.

Bài tập 8.6: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $z = -x^3 + 8y^3 + 6xy$,

2. $z = x^2 + y^3 - 6xy$,

3. $z = xy^2(1 - x - y)$ với $y \neq 0$,

4. $z = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$,

5. $z = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$,

6. $z = \ln(2xy) + 2y^2 - 2xy - 6y$.

1. $z = -x^3 + 8y^3 + 6xy$.

$$\begin{aligned} * \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6y = 0 \\ 24y^2 + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 / 2 \\ 24(x^2 / 2)^2 + 6x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 / 2 \\ 6x^4 + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 / 2 \\ 6x(x^3 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 / 2 \\ x = 0 \vee x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1/2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Do đó, hàm số có hai điểm dừng: $(0, 0)$ và $(-1, 1/2)$.

* $z''_{xx} = -6x$, $z''_{xy} = 6$, $z''_{yy} = 48y$.

+ Tại $(0, 0)$: $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,

$H_2 = |H| = -36 < 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

+ Tại $(-1, 1/2)$: $H = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} H_1 = 6 > 0 \\ H_2 = |H| = 6 \cdot 24 - 6 \cdot 6 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $(-1, 1/2)$.

2. $z = x^2 + y^3 - 6xy$.

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 - 6 \cdot 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y(y - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = 0 \vee y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 18 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có hai điểm dừng: $(0, 0)$ và $(18, 6)$.

$$* z''_{xx} = 2, z''_{xy} = -6, z''_{yy} = 6y.$$

+ Tại $(0, 0)$: $H = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$,

$H_2 = |H| = -36 < 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

+ Tại $(18, 6)$: $H = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 36 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} H_1 = 2 > 0 \\ H_2 = |H| = 2 \cdot 36 - 6 \cdot 6 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $(18, 6)$.

3. $z = xy^2(1 - x - y) = xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ với $y \neq 0$.

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \\ 2xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(1 - 2x - y) = 0 \\ xy(2 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ x(2-2x-3y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ x=0 \vee 2-2x-3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 2-2x-3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1/4 \\ y=1/2 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có hai điểm dừng: $(0, 1)$ và $(1/4, 1/2)$.

$$* z''_{xx} = -2y^2, z''_{xy} = 2y - 4xy - 3y^2, z''_{yy} = 2x - 2x^2 - 6xy.$$

$$+ \text{Tại } (0, 1): H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$H_2 = |H| = -1 < 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $(0, 1)$.

$$+ \text{Tại } (1/4, 1/2): H = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -3/8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} H_1 = -1/2 < 0 \\ H_2 = |H| = 3/16 - 1/16 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $(1/4, 1/2)$.

$$4. z = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y.$$

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y + 3x^2 = 0 \\ xe^y + 4y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có:

$$e^y > 0 \text{ và } 3x^2 \geq 0 \Rightarrow e^y + 3x^2 > 0.$$

Do đó, hpt trên vô nghiệm. Vậy, hàm số đã cho không có cực trị.

$$5. z = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3.$$

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ 2e^y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có một điểm dừng: $(0, 0)$.

$$* z''_{xx} = -6, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 2e^y.$$

$$+ \text{Tại } (0, 0), \text{ ta có: } H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = |H| = -12 < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

6. $z = \ln(2xy) + 2y^2 - 2xy - 6y$. Điều kiện: $xy > 0$.

$$* \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{2xy} - 2y = 0 \\ \frac{2x}{2xy} + 4y - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 2y = 0 \\ \frac{1}{y} + 4y - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2y} \\ \frac{1}{y} + 4y - \frac{1}{y} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2y} \\ 4y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 3/2 \end{cases}.$$

Do đó, hàm số có một điểm dừng: $(1/3, 3/2)$.

$$* z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}, z''_{xy} = -2, z''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + 4.$$

$$+ \text{Tại } (1/3, 3/2), \text{ ta có: } H = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ -2 & 32/9 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = |H| = -36 < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $(1/3, 3/2)$.

Bài tập 8.7: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $f(x, y) = x + y + (1/xy)$,
2. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$,
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4y + 5$ với $x > 0, y > 0$.

6.2 Cực trị toàn cục.

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định tại mọi (x, y) thuộc miền x . định D và $(a, b) \in D$. Ta nói:

+ hàm f **đạt cực đại toàn cục (đạt giá trị lớn nhất) trên D tại (a, b)** nếu

$$f(x, y) \leq f(a, b), \text{ với mọi } (x, y) \in D;$$

+ hàm f **đạt cực tiểu toàn cục (đạt giá trị nhỏ nhất) trên D tại (a, b)** nếu

$$f(x, y) \geq f(a, b), \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Cực đại toàn cục và cực tiểu toàn cục được gọi chung là **cực trị toàn cục**.

• **Định lý (điều kiện đủ của cực trị toàn cục):** Cho hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

Giả sử (a, b) là điểm dừng của f . Xét **ma trận Hesse**:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

và đặt $H_1(x, y) = f''_{xx}(x, y)$ và $H_2(x, y) = |H(x, y)|$. Khi đó, ta có:

1. nếu $H_1(x, y) < 0$ và $H_2(x, y) > 0 \forall (x, y) \in D$ thì f **đạt cực đại toàn cục (đạt gtn)** trên D tại (a, b) ,

2. nếu $H_1(x, y) > 0$ và $H_2(x, y) > 0 \forall (x, y) \in D$ thì f đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên D tại (a, b) .

Ví dụ 8.11: Tìm cực trị toàn cục của h. số $z = 3x^{1/3}y^{1/3} - x - 0,02y$ trên miền $x > 0, y > 0$.

$$\begin{aligned}
 * \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{1/3} - 1 = 0 \\ 3x^{1/3} \cdot \frac{1}{3} y^{-2/3} - 0,02 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-2/3} y^{1/3} = 1 \\ x^{1/3} y^{-2/3} = 0,02 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^{-2} y = 1 \\ xy^{-2} = 0,02^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0,02^3 y^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0,02^3 (x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(0,02^3 x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 > 0 \\ y = 2500 > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Do đó, hàm số có một điểm dừng: $(50, 2500)$.

$$* z''_{xx} = -\frac{2}{3} x^{-5/3} y^{1/3}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{-2/3}, \quad z''_{yy} = -\frac{2}{3} x^{1/3} y^{-5/3}.$$

$$\text{Ta có: } H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} x^{-5/3} y^{1/3} & \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{-2/3} \\ \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{-2/3} & -\frac{2}{3} x^{1/3} y^{-5/3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} H_1 = -\frac{2}{3} x^{-5/3} y^{1/3} < 0, \forall x > 0, y > 0 \\ H_2 = |H| = -\frac{2}{3} x^{-5/3} y^{1/3} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{1/3} y^{-5/3} \right) - \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{-2/3} \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{-2/3} \\ = \frac{4}{9} x^{-4/3} y^{-4/3} - \frac{1}{9} x^{-4/3} y^{-4/3} = \frac{1}{3} x^{-4/3} y^{-4/3} > 0, \forall x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Vậy, hàm số đạt cực đại toàn cục (đạt gtn) trên miền $x > 0, y > 0$ tại $(50, 2500)$.

6.3 Cực trị ràng buộc của hàm số theo hai biến số thực.

Xét bài toán tìm cực trị (hoặc cực trị toàn cục) của hàm $z = f(x, y)$ với ràng buộc:

$$g(x, y) = g_0.$$

Trước hết, ta lập **hàm Lagrange**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g_0 - g(x, y)],$$

trong đó λ được gọi là **nhân tử Lagrange**.

• **Định lý (điều kiện cần của cực trị có ràng buộc)**: Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị với ràng buộc $g(x, y) = g_0$ tại (a, b) . Hơn nữa, các hàm f và g có các đạo hàm riêng tại (a, b) . Khi đó, tồn tại λ_0 thỏa các điều kiện sau:

$$L'_x(a, b, \lambda_0) = 0, \quad L'_y(a, b, \lambda_0) = 0, \quad L'_\lambda(a, b, \lambda_0) = 0.$$

Điểm (a, b, λ_0) thỏa hệ phương trình trên được gọi là **điểm dừng** của hàm Lagrange L .

• **Định lý (điều kiện đủ của cực trị có ràng buộc)**: Cho hàm Lagrange $L(x, y, \lambda)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại mọi điểm (x, y, λ) gần điểm dừng (a, b, λ_0) . Xét **ma trận Hesse** bao:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

và đặt

$$\overline{H}_1 = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{x\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad \overline{H}_2 = |\overline{H}|.$$

Khi đó, ta có:

1. nếu $\overline{H}_1 < 0$ và $\overline{H}_2 > 0$ tại (a, b, λ_0) thì f đạt cực đại tại (a, b) với r. buộc $g(x, y) = g_0$,
2. nếu $\overline{H}_1 < 0$ và $\overline{H}_2 < 0$ tại (a, b, λ_0) thì f đạt cực tiểu tại (a, b) với r. buộc $g(x, y) = g_0$,
3. nếu $\overline{H}_1 < 0$ và $\overline{H}_2 > 0$ tại mọi $(x, y) \in D$ và mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ thì f đạt cực đại toàn cục (đạt gtn) trên D tại (a, b) với ràng buộc $g(x, y) = g_0$.
4. nếu $\overline{H}_1 < 0$ và $\overline{H}_2 < 0$ tại mọi $(x, y) \in D$ và mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ thì f đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên D tại (a, b) với ràng buộc $g(x, y) = g_0$.

Ví dụ 8.12: Tìm cực trị của:

1. hàm số $z = 3x^2 - 5y$ với ràng buộc $x + y = 1$,
2. hàm số $z = 1 - x - 2y$ với ràng buộc $2x^2 + y^2 = 1$.

1. Cách 1: Phương pháp thế.

Từ ràng buộc $x + y = 1$, ta suy ra $y = 1 - x$.

Thay vào hàm z , ta được $z = 3x^2 - 5(1 - x) = 3x^2 + 5x - 5$.

$$* \frac{dz}{dx} = 6x + 5,$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = -5/6.$$

$$* \frac{d^2z}{dx^2} = 6.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{dz}{dx} \left(\frac{-5}{6} \right) = 0 \\ \frac{d^2z}{dx^2} \left(\frac{-5}{6} \right) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số $z = 3x^2 + 5x - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -5/6$.

Do đó, h. số $z = 3x^2 - 5y$ đạt cực tiểu tại $(x, y) = (-5/6, 11/6)$ với r. buộc $x + y = 1$.

Cách 2: Phương pháp nhân tử Lagrange.

$$* \text{Hàm Lagrange: } L(x, y, \lambda) = 3x^2 - 5y + \lambda(1 - x - y).$$

$$* \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - \lambda = 0 \\ -5 - \lambda = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5/6 \\ y = 11/6 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm L có một điểm dừng $(x, y, \lambda) = (-5/6, 11/6, -5)$.

$$* L''_{xx} = 6, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{x\lambda} = -1,$$

$$L''_{yx} = 0, \quad L''_{yy} = 0, \quad L''_{y\lambda} = -1,$$

$$L''_{\lambda x} = -1, \quad L''_{\lambda y} = -1, \quad L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

Tại $(x, y, \lambda) = (-5/6, 11/6, -5)$, ta có:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \overline{H}_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \\ \overline{H}_2 = |\overline{H}| = -6 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h. số $z = 3x^2 - 5y$ đạt cực tiểu tại $(x, y) = (-5/6, 11/6)$ với r. buộc $x + y = 1$.

2. * Hàm Lagrange: $L(x, y, \lambda) = 1 - x - 2y + \lambda(1 - 2x^2 - y^2)$.

$$* \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 4\lambda x = 0 \\ -2 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/4\lambda \\ y = -1/\lambda \\ 1 - 2(-1/4\lambda)^2 - (-1/\lambda)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/4\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = 9/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2}/6 \\ y = -2\sqrt{2}/3 \\ \lambda = 3/2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2}/6 \\ y = 2\sqrt{2}/3 \\ \lambda = -3/2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm L có hai điểm dừng $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3, 3/2\sqrt{2})$;

$(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}/6, 2\sqrt{2}/3, -3/2\sqrt{2})$.

$$* L''_{xx} = -4\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{x\lambda} = -4x,$$

$$L''_{yx} = 0, \quad L''_{yy} = -2\lambda, \quad L''_{y\lambda} = -2y,$$

$$L''_{\lambda x} = -4x, \quad L''_{\lambda y} = -2y, \quad L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

+ Tại $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3, 3/2\sqrt{2})$, ta có:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} -6/\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & -3/\sqrt{2} & 4\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 4\sqrt{2}/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \begin{vmatrix} -6/\sqrt{2} & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 0 \end{vmatrix} = -8/9 < 0 \\ \bar{H}_2 = |\bar{H}| = 12\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h. số z đạt cực đại tại $(x, y) = (-\sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3)$ với r. thuộc $2x^2 + y^2 = 1$.

+ Tại $(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}/6, 2\sqrt{2}/3, -3/2\sqrt{2})$, ta có:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & -4\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -4\sqrt{2}/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \begin{vmatrix} 6/\sqrt{2} & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & 0 \end{vmatrix} = -8/9 < 0 \\ \bar{H}_2 = |\bar{H}| = -12\sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h. số z đạt cực tiểu tại $(x, y) = (\sqrt{2}/6, 2\sqrt{2}/3)$ với r. thuộc $2x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 8.13: Tìm cực trị toàn cục của các hàm số $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ trên miền $\mathbb{R}^2$ với ràng buộc $x + y + 3 = 0$.

* Hàm Lagrange: $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3)$.

$$* \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ y = -3/2 \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm L có một điểm dừng $(x, y, \lambda) = (-3/2, -3/2, 1/2)$.

$$* L''_{xx} = 2, L''_{xy} = -1, L''_{x\lambda} = 1,$$

$$L''_{yx} = -1, L''_{yy} = 2, L''_{y\lambda} = 1,$$

$$L''_{\lambda x} = 1, L''_{\lambda y} = 1, L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

Ta có:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \overline{H}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \overline{H}_2 = |\overline{H}| = -6 < 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h. số z đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên miền $\mathbb{R}^2$ tại $(x, y) = (-3/2, -3/2)$ với ràng buộc $x + y + 3 = 0$.

6.4 Một số bài toán cực trị trong kinh tế

Ví dụ 8.14: Một công ty kẹo sản xuất hai loại kẹo A và B, và có chi phí trung bình lần lượt là 2 USD và 3 USD trên một kg. Số lượng (tính theo kg) của các sản phẩm loại A và B bán được mỗi tuần lần lượt là Q_1 và Q_2 , và được cho bởi

$$Q_1 = 400(P_2 - P_1) \text{ và } Q_2 = 400(9 + P_1 - 2P_2),$$

trong đó P_1 và P_2 lần lượt là giá bán (tính theo USD trên một kg) của A và B. Hãy xác định giá bán của mỗi sản phẩm để tối đa hóa lợi nhuận P của công ty.

Ta cần tìm $P_1 > 0, P_2 > 0$ sao cho hàm lợi nhuận

$$\begin{aligned} P &= R - C = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - 2Q_1 - 3Q_2 \\ &= P_1 \cdot 400(P_2 - P_1) + P_2 \cdot 400(9 + P_1 - 2P_2) \end{aligned}$$

$$- 2. 400(P_2 - P_1) - 3. 400(9 + P_1 - 2P_2)$$

đạt giá trị lớn nhất.

$$* \begin{cases} P'_{P_1} = 0 \\ P'_{P_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400(P_2 - 2P_1) + 400P_2 \cdot 1 - 800 \cdot (-1) - 1200 \cdot 1 = 0 \\ 400P_1 \cdot 1 + 400(9 + P_1 - 4P_2) - 800 \cdot 1 - 1200 \cdot (-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -800P_1 + 800P_2 - 400 = 0 \\ 800P_1 - 1600P_2 + 5200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 5,5 > 0 \\ P_2 = 6 > 0 \end{cases}.$$

$$* P''_{P_1P_1} = -800, P''_{P_1P_2} = 800, P''_{P_2P_2} = -1600.$$

$$\text{Ta có: } H = \begin{pmatrix} -800 & 800 \\ 800 & -1600 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} H_1 = -800 < 0, \forall P_1 > 0, P_2 > 0 \\ H_2 = |H| = 800 \cdot 1600 - 800^2 > 0, \forall P_1 > 0, P_2 > 0 \end{cases}.$$

Vậy, lợi nhuận P đạt giá trị lớn nhất trên miền $P_1 > 0, P_2 > 0$ tại $(P_1, P_2) = (5,5; 6)$.

Nghĩa là với giá bán $P_1 = 5,5$ và $P_2 = 6$ của kẹo loại A và B, lợi nhuận P của công ty đạt giá trị tối đa.

Ví dụ 8.15: Giả sử một công ty có một đơn đặt hàng gồm 200 đơn vị sản phẩm và muốn phân phối việc sản xuất giữa hai nhà máy của mình: nhà máy 1 và nhà máy 2. Gọi Q_1 và Q_2 lần lượt là số sản phẩm sản xuất được của nhà máy 1 và 2, và giả sử hàm tổng chi phí được cho bởi:

$$C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 200.$$

Tìm sản lượng đầu ra Q_1 và Q_2 để tổng chi phí nhỏ nhất.

Ta cần tìm $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ sao cho hàm chi phí

$$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 200$$

đạt giá trị nhỏ nhất với ràng buộc $Q_1 + Q_2 = 200$.

* Hàm Lagrange: $L(Q_1, Q_2, \lambda) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 200 + \lambda(200 - Q_1 - Q_2)$.

$$* \begin{cases} L'_{Q_1} = 0 \\ L'_{Q_2} = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4Q_1 + Q_2 - \lambda = 0 \\ Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 \\ 200 - Q_1 - Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 50 > 0 \\ Q_2 = 150 > 0 \\ \lambda = 350 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm L có một điểm dừng $(Q_1, Q_2, \lambda) = (50, 150, 350)$.

$$* L''_{Q_1Q_1} = 4, \quad L''_{Q_1Q_2} = 1, \quad L''_{Q_1\lambda} = -1,$$

$$L''_{Q_2Q_1} = 1, \quad L''_{Q_2Q_2} = 2, \quad L''_{Q_2\lambda} = -1,$$

$$L''_{\lambda Q_1} = -1, \quad L''_{\lambda Q_2} = -1, \quad L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

Ta có:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \overline{H}_1 < 0, \forall Q_1 > 0, Q_2 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \overline{H}_2 = |\overline{H}| = -4 < 0, \forall Q_1 > 0, Q_2 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm chi phí C đạt cực tiểu toàn cục (đạt gtnn) trên miền $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ tại $(Q_1, Q_2) = (50, 150)$ với ràng buộc $Q_1 + Q_2 = 200$.

Vậy, với sản lượng đầu ra $Q_1 = 50$ và $Q_2 = 150$ thì tổng chi phí của c. ty nhỏ nhất.

Bài tập 8.8: Giả sử một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm và bán tại hai thị trường tách biệt: thị trường 1 và 2. Giả sử đơn giá bán tại thị trường 1 và 2 lần lượt là $P_1 = 7$ và $P_2 = 6$, và tổng chi phí là

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2 + 3,$$

trong đó Q_1, Q_2 lần lượt là lượng hàng bán được ở thị trường 1 và 2. Tìm Q_1, Q_2 để xí nghiệp có lợi nhuận tốt nhất.

Bài tập 8.9: Một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường riêng biệt: thị trường 1 và 2. Giả sử các hàm cầu trên hai thị trường 1 và 2 l. lượt là

$$Q_{D_1} = 80 - \frac{P_1}{3}, \quad Q_{D_2} = 80 - \frac{P_2}{4}$$

và hàm tổng chi phí là $C(Q) = Q^2 + 30Q + 10$, trong đó P_i là đơn giá trên thị trường thứ i ($i = 1, 2$) và Q là tổng sản lượng. Tìm khối lượng sản phẩm công ty cung cấp cho các thị trường để lợi nhuận cao nhất.

Bài tập 8.10: Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm A và B với mức sản lượng lần lượt là Q_1 và Q_2 . Gọi P_1 và P_2 lần lượt là giá bán một đơn vị sản phẩm A và B. Cho biết

$$Q_1 = 140 - P_1, \quad Q_2 = 90 - \frac{P_2}{2}.$$

Hàm tổng chi phí của xí nghiệp này là $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 10Q_2 + 10$.

1. Tìm doanh thu biên theo Q_2 khi $(Q_1, Q_2) = (10, 15)$ và giải thích ý nghĩa kinh tế.
2. Hãy tìm Q_1 và Q_2 để xí nghiệp này có lợi nhuận tốt nhất.

Bài tập 8.11: Hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C = P \cdot Q - (wL + rK),$$

trong đó R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động, $w = 1$ là tiền lương của một lao động, K là tiền vốn, $r = 0,03$ là lãi suất của tiền vốn, $P = 9$ là đơn giá bán và Q là hàm sản xuất với $Q = L^{1/3}K^{1/3}$. Tìm L và K sao cho công ty đạt lợi nhuận tối đa.

Bài tập 8.12: Giả sử một xí nghiệp cần xác định lượng lao động L và lượng vốn K để cực tiểu hóa chi phí $C(K, L) = wL + rK$, trong đó $w = 400$ là tiền lương cho mỗi lao động và $r = 0,01$ là lãi suất của vốn vay. Cho biết xí nghiệp phải sản xuất $Q_0 = 1000$ đơn vị sản phẩm và hàm sản phẩm là $Q(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$. Hãy giải quyết bài toán này của xí nghiệp.

Bài tập 8.13: Một xí nghiệp có năng suất thỏa phtr $Q(x, y) = 3x^{1/2}y^{1/4}$ với $x > 0$ và $y > 0$ lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất và thứ hai. Khi x tăng thêm 1% thì năng suất của xí nghiệp sẽ tăng xấp xỉ bao nhiêu %?

Bài tập 8.14: Cho hàm $z(x, y) = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. hàm z đạt cực tiểu tại $M(0, 1)$;

- B. hàm z đạt cực đại tại $M(0, 1)$;
- C. hàm z có điểm dừng nhưng không đạt cực trị;
- D. hàm z không có điểm dừng.

Bài tập 8.15: Cho hàm $f(x, y) = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$. Chọn kết luận đúng:

- A. hàm f đạt cực tiểu tại $M(0, 0)$;
- B. hàm f đạt cực đại tại $M(0, 0)$;
- C. hàm f có điểm dừng nhưng không đạt cực trị;
- D. hàm f không có điểm dừng.

Bài tập 8.16: Cho biết hàm $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$ có hai điểm dừng là $A(0, 0)$ và $B(18, 6)$. Chọn kết luận đúng:

- A. hàm f không đạt cực trị địa phương tại A và đạt cực đại địa phương tại B ;
- B. hàm f đạt cực tiểu địa phương tại A và đạt cực đại địa phương tại B ;
- C. hàm f không đạt cực trị địa phương tại A và đạt cực tiểu địa phương tại B ;
- D. hàm f đạt cực đại địa phương tại A và đạt cực tiểu địa phương tại B .

Bài tập 8.17: Xét hàm $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ và điểm $M(0, 1)$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. hàm f đạt cực tiểu tại M ;
- B. hàm f đạt cực đại tại M ;
- C. M là điểm dừng nhưng không phải cực trị của hàm f ;
- D. M không phải là điểm dừng của hàm f .

Bài tập 8.18: Cho hàm $f(x, y) = x + y + \frac{27}{xy}$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. hàm f đạt cực đại tại $M(-3, -3)$;
- B. hàm f đạt cực đại tại $M(3, 3)$;
- C. hàm f đạt cực tiểu tại $M(3, 3)$;
- D. hàm f đạt cực tiểu tại $M(-3, -3)$.

Bài tập 8.19: Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm và bán với giá $P_1 = 110$ và $P_2 = 100$. Hàm chi phí cho bởi $C = C(Q_1, Q_2)$, trong đó Q_1 và Q_2 là sản lượng của hai loại sản phẩm. Khi lợi nhuận của xí nghiệp là lớn nhất thì chi phí biên đối với sản phẩm thứ nhất là:

- A. không xác định B. 10 C. 110 D. 100.

Bài tập 8.20: Cho hàm lợi ích $U(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Giả sử ta có điều kiện $x^2 + 2y^2 = T$ (1), trong đó T là hằng số dương cho trước. Điều kiện cần để U đạt cực đại tại (x, y) thỏa điều kiện (1) là:

- A. $yU'_x = 2xU'_y$ B. $2yU'_x = xU'_y$ C. $2xU'_x = yU'_y$ D. $xU'_x = 2yU'_y$.

• **Ý nghĩa kinh tế của đạo hàm riêng: biên tế riêng và hệ số co giãn riêng**

Ví dụ 8.16: Cho hàm chi phí $C = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ với x và y lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất và thứ hai.

1. Chi phí biên theo x : $M_x C = C'_x = 4x + 2y$.

Chi phí biên theo x tại $(10, 20)$: $M_x C(10, 20) = C'_x(10, 20) = 4.10 + 2.20 = 80$.

Ý nghĩa kinh tế của $M_x C(10, 20) = 80$:

tại $(x, y) = (10, 20)$, nếu ta giữ nguyên $y = 20$ và tăng x từ 10 thêm 1 đơn vị nguyên liệu thứ nhất thì chi phí tăng xấp xỉ 80 đơn vị tiền.

2. Chi phí biên theo y : $M_y C = C'_y = 2x + 6y$.

Chi phí biên theo y tại $(10, 20)$: $M_y C(10, 20) = C'_y(10, 20) = 2.10 + 6.20 = 140$.

Ý nghĩa kinh tế của $M_y C(10, 20) = 140$:

tại $(x, y) = (10, 20)$, nếu ta giữ nguyên $x = 10$ và tăng y từ 20 thêm 1 đơn vị nguyên liệu thứ hai thì chi phí tăng xấp xỉ 140 đơn vị tiền.

3. Hệ số co giãn của chi phí theo x : $\epsilon_x C = C'_x \cdot \frac{x}{C} = (4x + 2y) \cdot \frac{x}{2x^2 + 2xy + 3y^2}$.

Hệ số co giãn của chi phí theo x tại $(10, 20)$:

$$\epsilon_x C(10, 20) = (4.10 + 2.20) \cdot \frac{10}{2.10^2 + 2.10.20 + 3.20^2} = \frac{4}{9}.$$

Ý nghĩa kinh tế của $\varepsilon_x C(10, 20) = \frac{4}{9}$:

tại $(x, y) = (10, 20)$, nếu ta giữ nguyên $y = 20$ và tăng x từ 10 thêm 1% thì chi phí tăng thêm xấp xỉ $(4/9)\%$.

4. Hệ số co giãn của chi phí theo y : $\varepsilon_y C = C'_y \cdot \frac{y}{C} = (2x + 6y) \cdot \frac{y}{2x^2 + 2xy + 3y^2}$.

Hệ số co giãn của chi phí theo y tại $(10, 20)$:

$$\varepsilon_y C(10, 20) = (2 \cdot 10 + 6 \cdot 20) \cdot \frac{20}{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 + 3 \cdot 20^2} = \frac{14}{9}.$$

Ý nghĩa kinh tế của $\varepsilon_y C(10, 20) = \frac{14}{9}$:

tại $(x, y) = (10, 20)$, nếu ta giữ nguyên $x = 10$ và tăng y từ 20 thêm 1% thì chi phí tăng thêm xấp xỉ $(14/9)\%$.

* **Bài tập** liên quan đến đạo hàm riêng và cực trị hàm nhiều biến trong sách *Bài tập Toán Cao cấp*: các trang từ 219 đến 223 và từ 265 đến 275.