

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

LỜI NÓI ĐẦU

Sách “*Bài tập Toán Cao Cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế*” sẽ cung cấp một nền tảng Toán học cho sinh viên của khối ngành thương mại – kinh tế – quản trị – tài chính, nhằm phục vụ cho các môn chuyên ngành. Cuốn sách này giúp các sinh viên biết cách vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập, giúp các sinh viên nắm vững hơn một số kiến thức về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, hàm một biến, hàm nhiều biến, tích phân, phương trình vi phân và các ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế và đời sống,...

Môn Toán giúp người học có những công cụ để tính toán. Từ các kết quả tính toán, người học sẽ phân tích, tổng hợp, kết luận và đưa ra quyết định. Ngoài ra, môn Toán còn giúp người học có một khả năng tư duy tốt, biết cách lý luận chặt chẽ, có những phương pháp quan sát toàn diện và tinh tế. Năng lực Toán học là một khả năng cần thiết để nghiên cứu sâu hơn các ngành khoa học khác, đặc biệt là trong kinh tế. Do đó, việc học toán cũng giúp các sinh viên của khối ngành thương mại – kinh tế – quản trị – tài chính nâng cao năng lực cạnh tranh và hội nhập. Trong vài chục giải Nobel về Kinh tế gần đây, đã có khoảng 10 giải Nobel Kinh tế được trao cho những nhà Kinh tế học mà xuất thân của họ là những nhà Toán học.

Vì thời gian dành cho môn học này trong nhà trường là quá ít, nên để học tốt môn học này, các sinh viên cần phải dành nhiều thời gian để tự học, đọc thật kỹ tài liệu và học theo nhóm.

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

Dù đã cố gắng, nhưng vẫn không tránh khỏi nhiều thiếu sót. Chúng tôi thành thật mong muốn sự góp ý của quý độc giả.

Nhóm biên soạn, năm 2018

(Nguyễn Thanh Vân – Đào Bảo Dũng)

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
Chương I: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC	7
Chương II: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH & ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ.....	53
Chương III: HÀM MỘT BIẾN GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC	99
Chương IV: PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN.....	122
Chương V: TÍCH PHÂN	167
Chương VI: HÀM NHIỀU BIẾN.....	201
Chương VII: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN.....	224
Chương VIII: ỨNG DỤNG CỦA GIẢI TÍCH TRONG KINH TẾ	248

Chương I

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa ma trận & các phép toán cơ bản của ma trận

1. Định nghĩa ma trận

Ma trận A có cấp (còn gọi là *kích thước*) $m \times n$ là một bảng số các số thực, xếp thành m dòng và n cột có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ L & L & L & L \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Khi đó:

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1, m} \text{ và } \forall j = \overline{1, n}$$

2. Các loại ma trận

- Ma trận $O_{m \times n}$ là ma trận gồm toàn số 0.
- *Ma trận vuông*: là ma trận mà số dòng bằng số cột. Ta thường gọi số dòng của ma trận vuông là **cấp** của ma trận ấy. Khi đó, đường chéo nối các phần tử a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} được gọi là **đường chéo chính** của ma trận

vuông. Khi đó, *vết* của ma trận vuông là tổng của tất cả các phần tử của đường chéo chính.

- *Ma trận tam giác trên*: là ma trận vuông mà các phần tử ở dưới đường chéo chính đều bằng 0.
- *Ma trận tam giác dưới*: là ma trận vuông mà các phần tử ở trên đường chéo chính đều bằng 0.
- *Ma trận đường chéo*: là ma trận vuông mà các phần tử không thuộc đường chéo chính đều bằng 0.
- *Ma trận đơn vị*: là ma trận đường chéo mà các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1.
- Ma trận chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m \times n}$ là $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$

3. Phép cộng hai ma trận

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

4. Phép nhân ma trận với một số thực

$$k.A = (k.a_{ij})_{m \times n} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Tính chất: Cho A, B, C là các ma trận cấp $m \times n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Khi đó:

i. $A + B = B + A$

ii. $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii. $A + O = O + A$ với $O = (0)_{m \times n}$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

iv. $A + (-A) = O$ với $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ (còn gọi là *ma trận đối* của A)

v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

vi. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

vii. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

viii. $1.A = A$

ix. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$

5. Phép nhân hai ma trận

Cho các ma trận

$$A = (a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{p \times n}$$

Thì: $A.B = (c_{ij})_{m \times n}$ với $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$, $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$.

Tính chất: Cho $D_{k \times m}$, $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$, $C_{n \times p}$. Khi đó

i. $(DB)C = D(BC)$

ii. $(A + B)C = AC + BC$

iii. $D(A + B) = DA + DB$

iv. $I_m A_{m \times n} = A$

v. $A_{m \times n} I_n = A$

vi. $(BC)^T = C^T B^T$

II. Định thức

Cho ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ L & L & L & L \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times n}$$

Định thức của ma trận A được ký hiệu là $|A|$ hay $\det(A)$ được xác định như sau:

(i) $n=1$, ta định nghĩa: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

(ii) $\forall n \geq 2$, đặt $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, gọi là *phần bù đại số* của a_{ij} trong $|A|$, trong đó M_{ij} là định thức con bù của a_{ij} trong $|A|$ (chú ý rằng M_{ij} là định thức cấp $n-1$ có được từ $|A|$ bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j của $|A|$).

Khi đó:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + L + a_{1n}A_{1n} \quad (\text{khai triển theo dòng } i) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + L + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{khai triển theo cột } j) \end{aligned}$$

Một số tính chất thường dùng:

- i. $|A| = |A^T|$ với A là ma trận vuông
- ii. Định thức sẽ đổi dấu nếu đổi chỗ hai dòng với nhau trong định thức.

- ✓ Nhóm thứ hai mang dấu – là: Tích của các phần tử nằm trên đường chéo phụ, tích các phần tử song song với đường chéo phụ với phần tử ở góc đối diện. (hình 1.b)

III. Ma trận nghịch đảo

Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Ma trận B là ma trận nghịch đảo của A nếu:

$$AB = BA = I_n$$

và B được ký hiệu là A^{-1} . Khi đó A được gọi là ma trận *khả nghịch* hay ma trận *không suy biến*.

$$\text{Ta ký hiệu } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ với } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

và M_{ij} là *định thức con bù* của a_{ij} trong $|A|$ (là định thức con của $|A|$ sau khi bỏ đi dòng i cột j), ta thường gọi A^* là *ma trận phụ hợp* của ma trận A (đôi khi A^* còn được ký hiệu là $\overline{A}$ hoặc P_A)

1. Mệnh đề: Với ma trận $A_{n \times n}$, ta có $A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot I_n$

2. Mệnh đề: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A_{n \times n}$ có ma trận nghịch đảo. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

3. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi theo dòng:

(thường dùng cho ma trận có cấp khá lớn)

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng:

- i. Đổi chỗ hai dòng cho nhau.
- ii. Lấy một dòng nhân với một số khác 0.
- iii. Thay một dòng bằng dòng đó cộng với k lần dòng khác.

Biến đổi cùng một lúc hai ma trận A và I (ma trận đơn vị) cùng cấp bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, theo sơ đồ như sau:

$$(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1})$$

Chú ý: Trong quá trình biến đổi, nếu xuất hiện một dòng có các phần tử đều bằng 0 thì ta kết luận không có ma trận nghịch đảo.

Tính chất: Cho A, B là các ma trận vuông khả nghịch và cùng cấp. Khi đó:

- i. A^{-1} là duy nhất.
- ii. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- iv. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ với $\alpha \neq 0$

4. Giải phương trình ma trận:

$$\text{Xét phương trình ma trận } A_{m \times n} \cdot X = B_{m \times p} \quad (1)$$

• **Cách 1:** Dựa vào kích thước của các ma trận A và B, ta đặt ma trận:

$$X = (x_{ij})_{n \times p}$$

với n là số cột của ma trận A và p là số cột của ma trận B. Dùng phép nhân ma trận và cho hai ma trận bằng nhau ta được một hệ phương trình tuyến tính. Giải hệ phương trình đó, ta sẽ tìm được các phần tử x_{ij} .

• **Cách 2:** (chỉ được áp dụng khi A là một ma trận vuông)

- i. Nếu $|A| \neq 0$, khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}B$
- ii. Nếu $|A| = 0$, B là ma trận vuông và $|B| \neq 0 \Rightarrow$ không có ma trận X (theo định lý về phép nhân định thức).
- iii. Nếu $|A| = 0$, B là ma trận vuông và $|B| = 0$ thì sử dụng cách 1.

IV. Hạng của ma trận

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Ma trận A có:

- m dòng $\{A_1^d, A_2^d, \dots, A_m^d\}$
- n cột $\{A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c\}$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

$$\text{Hơn nữa: } \text{Rank} \{A_1^d, A_2^d, \dots, A_m^d\} = \text{Rank} \{A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c\}.$$

Hạng của m dòng trong ma trận A được gọi là **hạng** của ma trận A và được ký hiệu là $R(A)$ hay $r(A)$ hay $\text{Rank}(A)$.

Mệnh đề: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ có ít nhất một định thức con cấp k khác 0 và mọi định thức con cấp $k+1$ đều bằng 0 thì hạng của ma trận A bằng k .

Mệnh đề: Nếu dùng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng (hay theo cột) thì hạng của ma trận sẽ không thay đổi. Nhắc lại các phép biến đổi sơ cấp theo dòng:

- Đổi chỗ hai dòng cho nhau.
- Nhân một dòng với một số khác 0.
- Thay dòng i bằng dòng i cộng với k lần dòng j với $k \in \mathbb{R}$ và $i \neq j$.

Chú ý: Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trong mệnh đề trên để biến đổi ma trận A ban đầu về ma trận B có *dạng bậc thang* như sau

$$B_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1r} & L & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & L & b_{2r} & L & b_{2n} \\ L & L & L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & b_{rr} & L & b_{rn} \\ 0 & 0 & L & 0 & L & 0 \\ L & L & L & L & 0 & L \\ 0 & 0 & L & 0 & L & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr} \neq 0$.

$$\text{và } R(A) = R(B) = r \text{ vì tồn tại } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & L & b_{2r} \\ L & L & O & L \\ 0 & 0 & L & b_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

B. BÀI TẬP

Bài 1: Tính các định thức sau:

$$\text{a. } D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c. } D_4 = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}, D_5 = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ m-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix}$$

Giải:

$$\text{a. } D_1 = 5, D_2 = -5$$

$$\text{b. } D_3 = 42$$

$$\text{c. } D_4 = m^3 + 3m \text{ và } D_5 = 4$$

Bài 2: Tính định thức $D = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

Giải:

Cộng cột 2 vào cột 1, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+b+c & a & 1 \\ a+b+c & b & 1 \end{vmatrix}$$

Rút thừa số chung $(a+b+c)$ ở cột 1 thì

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$$

Vì cột 1 và cột 3 giống nhau nên ta có: $D = 0$

Bài 3: Chứng minh rằng

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Từ đó tìm điều kiện của a, b, c để $D = 0$

Giải:

Thay dòng 2 bằng cách lấy dòng 2 trừ dòng 1 và thay dòng 3 bằng cách lấy dòng 3 trừ dòng 1 thì

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Rút thừa số $(b-a)$ ở dòng 2 và thừa số $(c-a)$ ở dòng 3 thì

$$= D = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & a+c \end{vmatrix}$$

$$\text{Vì } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & a+c \end{vmatrix} = c-b \text{ nên } D = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Vậy, $D=0 \Leftrightarrow a=b \vee b=c \vee a=c$

Bài 4: Tính định thức sau đây bằng cách khai triển theo dòng 3

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Giải:

Khai triển định thức D theo dòng 3 ta có:

$$D = aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34}$$

Ta tính các phần bù đại số:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -19$$

Vậy: $D = 8a + 15b + 12c - 19d$

Bài 5: Tính định thức sau đây

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải:

Cộng cột 2, 3, 4, 5 vào cột 1, ta có

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Rút thừa số 9 ở cột 1, thì: $D = 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Áp dụng tính chất thay dòng k bằng cách lấy dòng k trừ dòng 1 (với $k = 2, 3, 4, 5$) ta có

$$D = 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Như vậy $D = 9 \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 2304$

Bài 6: Tính định thức cấp n sau đây

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & L & n \\ -1 & 0 & 3 & L & n \\ -1 & -2 & 0 & L & n \\ M & M & M & O & n \\ -1 & -2 & -3 & L & 0 \end{vmatrix}$$

Giải:

Ký hiệu d_i là dòng thứ i .

Thay d_2 bởi $d_1 + d_2$, d_3 bởi $d_1 + d_3, \dots$, dòng d_n bởi $d_1 + d_n$ thì ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & L & n \\ 0 & 2 & 6 & L & 2n \\ 0 & 0 & 3 & L & 2n \\ M & M & M & O & M \\ 0 & 0 & 0 & L & n \end{vmatrix}$$

Nên $D = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$

Bài 7: Cho các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Hãy tính $3A + 2B$.
- Tìm ma trận X sao cho $A + X = B$.

c. Tính $A.B$ và $B.A$.

d. Kiểm tra lại ba câu hỏi trên với

i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

ii. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a. } 3A + 2B &= 3 \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 18 & 9 & 12 \\ 15 & -6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 6 & 4 & 8 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 19 & 15 \\ 24 & 13 & 4 \\ 21 & -8 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Từ phương trình $A + X = B \Rightarrow X = B - A$

$$\text{Nên } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -10 \\ -3 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c. A.B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 7 & -26 \\ 27 & 14 & -30 \\ -10 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 24 \\ -2 & 29 & 41 \\ 0 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

d. *Hướng dẫn:*

i. Câu c không thực hiện được.

ii. Chỉ thực hiện được $A.B$ và $B.A$

Bài 8: Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Tính A^T , B^T , $(AB)^T$ và $B^T A^T$.

b. Hãy kiểm tra $(AB)^T = B^T A^T$

Giải:

$$a. A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^T = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Theo câu a, ta có: $(A.B)^T = B^T A^T$

Bài 9: Tính $A_n = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n$ với $x \in \mathbb{R}$ và n là số tự nhiên

Giải:

Bằng phương pháp quy nạp:

+ Với $n=1$, ta có: $A_1 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

+ Với $n=2$, ta có:

$$A_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

+ Giả sử A_n đúng với $n=k$, tức là :

$$A_k = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} x^k & kx^{k-1} \\ 0 & x^k \end{pmatrix}$$

Ta phải chứng minh A_n đúng với $n = k+1$, nghĩa là:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^k \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } A_{k+1} &= \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^k & kx^{k-1} \\ 0 & x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^k \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng.

$$\text{Do đó: } A_n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$$

Bài 10: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & a_2 & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & a_n \end{pmatrix}$. Hãy tính A^k

Đáp số: $A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & L & 0 \\ 0 & a_2^k & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & a_n^k \end{pmatrix}$

Bài 11: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm ma trận nghịch

đảo của A bằng hai cách: sử dụng ma trận A^* , sử dụng phép biến đổi sơ cấp theo dòng.

Giải:

Cách 1: Dùng công thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

+ Ta có $|A| = -3 \neq 0$ do đó A không suy biến $\exists A^{-1}$.

+ Tìm các phần bù đại số A_{ij}

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

Vậy, ta có: $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

Cách 2: Dùng phép biến đổi sơ cấp theo dòng

$$(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow 2d_3 - d_1}]{d_2 \rightarrow 2d_2 - 3d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow \frac{1}{2}d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \rightarrow d_2 + d_3}]{d_1 \rightarrow d_1 + (-3)d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 \rightarrow d_1 + 7d_2}]{d_1 \rightarrow 3d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -14 & 12 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 \rightarrow (1/6)d_1 \\ d_2 \rightarrow (-1/3)d_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) = (I | A^{-1})$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Chú ý: Người ta thường dùng cách 2 đối với ma trận vuông cấp 4 trở lên và có $|A| \neq 0$.

Bài 12: Tìm hạng của các ma trận sau đây

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Giải:

Ta biến đổi ma trận A thành ma trận có dạng bậc thang, khi đó số dòng khác không của ma trận có dạng bậc thang là

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế
hạng của ma trận A.

$$\begin{aligned} \text{a. Ta có: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1}]{\substack{d_2 \rightarrow d_2 - d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(A) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{b. } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 17 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & a \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow 3d_3 + (-4)d_1 \\ d_4 \rightarrow -d_4 + d_1}]{\substack{d_2 \rightarrow (-3)d_2 + d_1}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 17 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & 1-3a \\ 0 & -25 & -65 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow d_3 + (-5)d_2 \\ d_4 \rightarrow d_4 + d_2}]{d_3 \rightarrow d_3 + (-5)d_2} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 17 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & 15a \\ 0 & 0 & 0 & -3a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow (1/5)d_3 \\ d_4 \rightarrow 5d_4 + d_3}]{\quad} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 17 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & -5 & 1-3a & -13 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Biện luận:

- Nếu $a = 0 \Rightarrow$ hạng A bằng 2.
- Nếu $a \neq 0 \Rightarrow$ hạng A bằng 3.

Bài 13: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận B vuông cấp 2 sao cho $AB = BA$.

Giải:

Ma trận B có dạng $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{Xét } A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = a + 3b \\ b + 2d = 2a + 4b \\ 3a + 4c = c + 3d \\ 3b + 4d = 2c + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0a - 3b + 2c = 0 \\ -2a - 3b - 0c + 2d = 0 \\ 3a + 0b + 3c - 3d = 0 \\ 0a + 3b - 2c + 0d = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình cuối, ta được:

$$a = -\frac{3}{2}b, \quad c = \frac{3}{2}b, \quad d = 0$$

$$\text{Vậy, } B = \begin{pmatrix} -\frac{3b}{2} & b \\ \frac{3b}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{b}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (với } b \text{ tùy ý)}$$

Bài 14: Tìm tất cả các ma trận X , Y thỏa mãn $A.X = B$ và $Y.A^T = B$, biết rằng

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Giải:

♦ Tìm ma trận X .

a. Vì A có cấp (2×3) và B có cấp (2×2) nên X có cấp (3×2)

$$\text{Đặt } X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có: } AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & y_1 + 2y_2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình cuối, ta có } \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_3 = -4x_2 \\ y_1 = 2 - 2y_2 \\ y_3 = 4 - 4y_2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy, } X = \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 & 2 - 2y_2 \\ x_2 & y_2 \\ -4x_2 & 4 - 4y_2 \end{pmatrix} \text{ với } \forall x_2, y_2 \in \mathbb{R}$$

b. **Cách 1:** Giải tương tự như trên

Cách 2: Vì $|A| = 1 \neq 0$ nên có A^{-1} . Vậy:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

♦ Tìm ma trận Y.

a. Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có A^T là ma trận cấp 3×2 , B là ma trận cấp 2×2 do đó Y phải là ma trận cấp 2×3 .

Đặt $Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

Ta có: $Y_{2 \times 3} A_{3 \times 2}^T = B_{2 \times 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_1 + 2y_2 & -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ y_1 + 2y_2 = -1 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình cuối, ta có x_1, x_2 được tính theo $x_3 = \alpha$ và y_1, y_2 được tính theo $y_3 = \beta$.

b. Vì $|A| = |A^T| = 1$. Vậy có $(A^T)^{-1}$

Ta có: $Y.A^T = B$

$$\Rightarrow Y = B.(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -26 & -22 \\ -48 & -103 & -88 \\ -35 & -78 & -67 \end{pmatrix} \text{ với } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Bài 15: Tìm tất cả các ma trận X sao cho $AX = B$

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Giải:

$$\text{a. Ta có: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = L = 0$$

Vì $|A| = 0$ nên ma trận A không khả nghịch.

$$\text{Ta lại có: } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = K = 78 \neq 0$$

Nên ta có điều vô lý: $AX = B \Rightarrow |A||X| = |B| \Rightarrow 0 \cdot |X| = 78$

Vậy, không tồn tại ma trận X

b. Tương tự: $|A| = 0 \Rightarrow$ ma trận A không khả nghịch

Vì $|B| = 0$. Ta có: $A \cdot X = B \Rightarrow |A| \cdot |X| = |B| \Rightarrow 0 \cdot |X| = 0$

$$\text{Vì } A_{3 \times 3} X = B_{3 \times 3} \text{ nên } X_{3 \times 3}. \text{ Ta đặt } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} + x_{31} & x_{12} + x_{32} & x_{13} + x_{33} \\ x_{21} + x_{31} & x_{22} + x_{32} & x_{23} + x_{33} \\ x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Từ đó, ta thu được một hệ phương trình tuyến tính chứa 9 ẩn số như sau

$$\begin{cases} x_{11} + x_{31} = 2 \\ x_{21} + x_{31} = -1 \\ x_{11} + x_{21} + 2x_{31} = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{12} + x_{32} = 1 \\ x_{22} + x_{32} = 0 \\ x_{12} + x_{22} + 2x_{32} = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{13} + x_{33} = 1 \\ x_{23} + x_{33} = 2 \\ x_{13} + x_{23} + 2x_{33} = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta có sẽ kết quả về ma trận X .

Bài 16: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ với $|A| \neq 0$. Tìm ma trận nghịch đảo của A biết rằng

$$A^2 + 3A - 2I_n = 0$$

Giải:

$$\text{Ta có: } A^2 + 3A = 2I_n \Leftrightarrow A.A + 3I_n.A = A.A + 3A.I_n = 2I_n$$

$$\Leftrightarrow (A + 3I_n)A = A(A + 3I_n) = 2I_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + 3I_n)A = \frac{1}{2}A(A + 3I_n) = I_n$$

Theo định nghĩa ma trận X thỏa mãn: $AX = XA = I_n$ thì $X = A^{-1}$. Do đó:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 3I_n)$$

Bài 17: Cho các ma trận sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Tìm ma trận A^{-1} (nếu có)

b. Tìm X, Y để
$$\begin{cases} A(X + Y) = B \\ (X - Y)A^T = B^T \end{cases}$$

Giải:

$$\text{a. Ta có: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Tìm ma trận phụ hợp P_A (hay còn gọi là A^*)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 ; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 ; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 ; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ma trận phụ hợp của A là: } P_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cách khác: Tìm A^{-1} bằng phương pháp biến đổi sơ cấp theo dòng như sau

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow d_3 - d_1}]{d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow -d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_1 \rightarrow d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I | A^{-1})$$

$$\text{Vậy: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A^T = B^T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X+Y = A^{-1}B \\ X-Y = B^T(A^T)^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \left[A^{-1}B + B^T(A^T)^{-1} \right] \\ Y = \frac{1}{2} \left[A^{-1}B - B^T(A^T)^{-1} \right] \end{cases}$$

$$\text{Với } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy: } X = \frac{1}{2} [A^{-1}B + B^T(A^T)^{-1}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & -5 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{và } Y = \frac{1}{2} [A^{-1}B - B^T(A^T)^{-1}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 18: Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 mà bình phương của nó là ma trận không.

Giải:

$$\text{Giả sử } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cd + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ cd + d^2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta có: $d = -a$, $bc = -a^2$

$$\text{Vậy: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ với } bc = -a^2 \text{ (} a, b, c \in \mathbb{I} \text{)}$$

Bài 19: (Trò chơi mã hóa và giải mã tin nhắn - ứng dụng của ma trận nghịch đảo): Ta xét một bảng mã đơn giản như sau

Chữ	Trống	a	b	c	d	e	f	g	h
Mã		1	2	3	4	5	6	7	8

Chữ	i	j	k	l	m	n	o	p	q
Mã	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Chữ	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Mã	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Giả sử ta có nội dung là “*good luck*”. Ta mã hóa nội dung này theo bảng mã đã nói ở trên, thì có các số như sau

7, 15, 15, 4, 0, 12, 21, 3, 11 (*)

Giả sử **ma trận mã hóa** là ma trận vuông $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cấp.

3. Ta sẽ sắp các số trong phần (*) thành ma trận A có 3 cột (bằng cấp của ma trận E) như sau

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 15 \\ 4 & 0 & 12 \\ 21 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Thực hiện phép tính $B = A.C = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 22 \\ 12 & 16 & 4 \\ 14 & 32 & 24 \end{pmatrix}$

Điều đó tương đương

$$A = B.C^{-1} = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 22 \\ 12 & 16 & 4 \\ 14 & 32 & 24 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 15 \\ 4 & 0 & 12 \\ 21 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Trò chơi như sau: có hai người M và N, ngầm sử dụng ma trận mã hóa E.

- M viết nội dung tin nhắn “*good luck*”, dùng bảng mã đơn giản nói trên để chuyển thành ma trận A. Sau đó, M sẽ tính ma trận $B = A.E$
- M gửi ma trận B cho N. Khi nhận được ma trận B, N sẽ tính ma trận $B.E^{-1}$ (thì $B.E^{-1}$ chính là ma trận A).
- Sau đó, N sẽ dựa vào bảng mã để viết lại nội dung tin nhắn từ ma trận $B.E^{-1}$, nội dung sẽ là “*good luck*”.

Áp dụng: Với ma trận mã hóa E, hãy giải mã nội dung khi bạn

nhận được ma trận $B = \begin{pmatrix} 21 & 33 & 14 \\ 18 & 21 & 13 \\ 29 & 10 & 21 \\ 19 & 6 & 25 \end{pmatrix}$. Đáp số: “*mathematics*”

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính các định thức sau đây

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} x+a & a & a \\ a & y+a & a \\ a & a & z+a \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}$$

2. Chứng minh rằng

$$\text{a. } \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{c. } \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

3. Tính các định thức sau đây

$$\text{a. } D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 3 & b & 0 \\ 3 & 5 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Cho số thực $\lambda = \frac{2}{3}$ và các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hãy tính $A+B$, λA , λB , $A.B$, A^2 , B^2

$$\text{5. Cho ma trận } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Tính } A.A^T, A^T A, A^2, A^3.$$

6. Tính

a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -104 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Tính các lũy thừa sau đây

a.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$$

b.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$$

c.
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$

d.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & \lambda_2 & L & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & \lambda_n \end{pmatrix}^m$$

8. Tìm ma trận X thỏa mãn $A.X = B$ với

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. Cho ma trận $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng

$$A(\alpha).A(\beta) = A(\alpha + \beta)$$

10.

a. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB = BA$. Chứng minh rằng:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ và } (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

b. Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ thỏa $a_{ij} = 0, \forall i \geq j$. Chứng minh rằng:

$$A^n = (0)_{n \times n} \text{ (ma trận không cấp } n \times n \text{)}$$

11. Tìm tất cả các ma trận giao hoán được với các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Tìm ma trận vuông cấp hai sao cho bình phương của nó bằng ma trận đơn vị.

13. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 0 & 1 & L & 1 \\ L & & & & \\ 1 & 1 & 1 & L & 0 \end{pmatrix}$

14. Tìm ma trận X biết rằng

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

15. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ và $C = (1 \ 2 \ -1)$

- a. Tìm m để A là ma trận suy biến
- b. Với $m=2$, tìm ma trận X sao cho $AX=B$ và tìm ma trận Y sao cho $YA=C$

16.

- a. Chứng minh rằng nếu $AB=BA$ thì $A^{-1}B=BA^{-1}$
- b. Cho A, B là hai ma trận không suy biến, chứng minh:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ và } (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

17. Tìm hạng của các ma trận sau đây

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ k & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

18. Tìm m thì ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & m & -5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ không suy biến

19. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = A - 3A^t$. Tìm ma trận B^{-1}

20. Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $|A| = 2$ và $B = -2A$. Khi đó hãy tính

a. $|A^2|, |A^{-1}|$

b. $|B|, |2A+B|$ và $|AB|$

22. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ có $\det(A) = 3$ và đặt ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}. \text{ Chứng minh rằng: } |A^T B| = 27.$$

21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$. Tính $|A|$.

23. Cho A là ma trận vuông cấp 4 có $|A| = -2$. Tính $|3A^T|$.

24. Cho A là ma trận vuông cấp n ($n \geq 2$). Mệnh đề nào sau đây là sai. Nếu sai, hãy cho một phản ví dụ.

a. $|A|$ không đổi khi ta đổi chỗ 2 dòng bất kỳ trong $|A|$.

b. $|A|$ không đổi khi ta biến đổi cột 1 thành cột 1 cộng với cột 2 trong $|A|$.

c. $|2A| = 2|A|$

d. $|-A| = |A|$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

e. $|A|$ không đổi khi ta nhân các phần tử của cột 2 trong $|A|$ với 3.

f. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, $\forall A, B$ là các ma trận vuông cấp n

g. $(CB)^T = B^T C^T$ với $C_{m \times k}, B_{k \times n}$

h. $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$ với $\forall A, B$ vuông cấp n , khả nghịch

i. $(A^2)^T = (A^T)^2$

25. Cho phương trình ma trận $A^T.X.B.C = D$ với A, B, C, D là các ma trận vuông cùng cấp và các ma trận A, B, C đều khả nghịch. Chứng minh rằng: $X = (A^T)^{-1}.D.C^{-1}.B^{-1}$

26. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X sao cho $AX = B$.

27. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa $AB = 3I_n$. Chứng minh rằng:

a. $BA = 3I_n$

b. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

c. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

d. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

28. Cho ma trận $A_{4 \times 6}$ có một định thức con cấp 3 khác 0. Mệnh đề nào sau đây là sai. Nếu sai, hãy cho một phản ví dụ.

a. $R(A) < 3$

b. $R(A) = 3$

c. $R(A) = 4$

d. $R(A) \geq 3$

29. Cho $A_{3 \times 4}$ có một định thức con cấp 3 khác 0. Mệnh đề nào sau đây là sai. Nếu sai, hãy cho một phản ví dụ.

a. $R(\alpha A) = 3, \alpha \in \mathbb{R}$

b. $R(2A) = 3$

c. $R(\alpha A) > 3, \alpha \in \mathbb{R}$

d. $R(A^T) = 4$

30. Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $|A| = 3$ và ma trận B thỏa mãn $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B$. Hãy tính $|B^2|$.

31. Cho $A_{4 \times 4}$, $B_{4 \times 4}$ là các ma trận vuông cấp 4 có $|A| = 3$, $|B| = 2$ và thỏa mãn $(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} C$

a. Hãy tính $|C|$.

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

b. Hãy tính $|P_A|$, $|P_B|$ và $|P_{AB}|$.

c. Hãy tính $|P_{2A}|$ và $|P_{3B}|$.

32. Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^2 - 3A + 2I = 0$

a. Chứng minh: A khả nghịch

b. Tìm A^{-1} theo A và I

c. Nếu $|A| = k \neq 0$, hãy tính $|2A - 3I|$ theo k .

33. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2B - AB^2 = I_n$. Chọn kết luận sai

a. Các ma trận A , B và $A - B$ khả nghịch

b. Ma trận $A - B$ khả nghịch và $(A - B)^{-1} = BA$

c. $AB(A - B) = I_n$

d. $A - B = A^{-1}B^{-1}$

34. Cho A , B và X là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $AX = B$ và $X^2 = I_n$ trong đó $X \neq -I_n$. Chọn phát biểu sai

a. Nếu A khả nghịch thì B khả nghịch

b. $BX = A$

c. $A - B$ là ma trận suy biến

d. $\det(X) = 1$

35. Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận có $a_{ij} = 0$ với $\forall i > j$ và thỏa mãn $A^T + 2A = I_n$. Chọn phát biểu sai

a. $A = A^T$

b. $|A| = 3^n$

c. $A + 2A^T = I_n$

d. $|A| = \frac{1}{3^n}$

$$\text{Nếu ta đặt } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ thì hệ (I) } \Leftrightarrow A.X = B$$

Mỗi bộ n số $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i, \forall i = \overline{1, m}$$

được gọi là một *nghiệm riêng* của hệ.

- Hệ (I) **có nghiệm** $\Leftrightarrow R(\bar{A}) = R(A)$
- Hai hệ phương trình được gọi là **trương đương** nếu hai tập nghiệm của chúng trùng nhau.

II. Phương pháp giải một hệ phương trình tuyến tính

1. Phương pháp khử ẩn liên tiếp (*phương pháp Gauss*)

Ta biết rằng mỗi hệ phương trình tuyến tính có duy nhất một ma trận hệ số mở rộng và ngược lại khi đã có ma trận hệ số mở rộng thì ta luôn viết được hệ phương trình tuyến tính, vì thế khi giải phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp (*phương pháp Gauss*), ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng của ma trận trên ma trận hệ số mở rộng của nó (*nếu đổi cột trong n cột đầu thì phải đổi thứ tự của ẩn số*).

Trong quá trình biến đổi, nếu xuất hiện một dòng của ma trận hệ số mở rộng có dạng $(0, 0, \dots, b)$ với $b \neq 0$ thì ta kết luận ngay hệ vô nghiệm. Trái lại, hệ sẽ có nghiệm và khi đó bao giờ

cũng đưa được ma trận hệ số mở rộng về dạng hình thang chuẩn (sau khi đã đổi n cột đầu)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & L & 0 & c_{1k+1} & L & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & L & 0 & c_{2k+1} & L & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & c_{3k+1} & L & c_{3n} & d_3 \\ M & M & M & O & M & M & O & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & 1 & c_{kk+1} & L & c_{kn} & d_k \end{array} \right)$$

Không giảm tính tổng quát ta có thể coi cột thứ j là cột biểu diễn các hệ số ẩn x_j ($j = \overline{1, \dots, n}$). Khi đó nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = \mathbf{d}_1 - (\mathbf{c}_{1k+1}\lambda_{k+1} + \dots + \mathbf{c}_{1n}\lambda_n) \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k - (\mathbf{c}_{kk+1}\lambda_{k+1} + \dots + \mathbf{c}_{kn}\lambda_n) \\ \mathbf{x}_{k+1} = \lambda_{k+1} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_n = \lambda_n \end{array} \right.$$

với $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ là những số thực tùy ý.

Ta gọi $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các *ẩn chính* và $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ là các *ẩn phụ*.

Chú ý: Trong thực hành, để tránh sự nhầm lẫn thì chỉ nên đổi chỗ các dòng (mà không nên đổi chỗ các cột).

58

$$\begin{cases} E_1(P_1, P_2, K, P_n) = 0 \\ E_2(P_1, P_2, K, P_n) = 0 \\ K \dots\dots\dots \\ E_n(P_1, P_2, K, P_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Do đặc điểm của các hàm cung, hàm cầu và ý nghĩa của các hệ số của giá P_i trong các hàm Q_{S_i} và Q_{D_i} , nên hệ phương trình tuyến tính (1) được đưa về dạng như sau

$$\begin{cases} a_{11}P_1 - a_{12}P_2 + K - a_{1n}P_n = b_1 \\ -a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + K - a_{2n}P_n = b_2 \\ K \\ -a_{n1}P_1 - a_{n2}P_2 - K + a_{nn}P_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

trong đó $a_{ij} \geq 0$, $b_i > 0$, $\forall i, j = \overline{1, n}$

Để tìm giá của các loại hàng tại điểm cân bằng thị trường, ta phải giải hệ phương trình tuyến tính (2).

Lời giải của (2) có ý nghĩa kinh tế khi các thành phần của nghiệm phải dương và khi thay những giá trị đó vào các hàm cung và cầu, giá trị các hàm đó cũng phải dương.

Ký hiệu các ma trận của hệ (2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & L & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & L & -a_{2n} \\ M & M & O & M \\ -a_{n1} & -a_{n2} & L & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M \\ b_n \end{pmatrix}$$

Khi đó, hệ (2) được viết dưới dạng: $A.P = B$ (2')

Và ta giải hệ (2') bằng một trong hai phương pháp đã nêu ở phần hệ phương trình tuyến tính.

2. Mô hình Input – Output Mở Leontief:

Mô hình này nhằm xác định đầu ra của mỗi ngành trong n ngành sao cho vừa đủ để thỏa mãn toàn bộ nhu cầu của cả nền kinh tế đó (kể cả dự trữ và xuất khẩu).

- Các đơn vị được sử dụng trong mô hình được quy thành đơn vị tiền.
- Ký hiệu a_{ij} là giá trị của lượng nguyên liệu mà ngành j nhận được từ ngành i để sản xuất ra một lượng sản phẩm có giá trị một đơn vị tiền.
- Giả sử rằng:
 - ✓ Mỗi ngành chỉ sản xuất một loại sản phẩm.
 - ✓ Các ngành sử dụng một tỷ lệ cố định nguyên liệu đầu vào từ các ngành khác.
 - ✓ Nếu lượng đầu vào tăng lên k lần thì đầu ra cũng tăng thêm k lần.

- Ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{n1} & a_{n2} & K & a_{nn} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận

hệ số đầu vào hay còn gọi là ma trận hệ số kỹ thuật.

Bên cạnh n ngành, mô hình còn có một ngành đặc biệt khác được gọi là ngành mở, cung ứng những đầu vào thiết yếu (ví dụ như lao động, dịch vụ) cho n ngành trên. Ngược lại, sản lượng của các ngành được xác định bởi yêu cầu nguyên liệu của các ngành trong nền kinh tế và yêu cầu cuối (yêu cầu dự trữ, xuất khẩu). Lượng yêu cầu cuối này được xem là yếu tố để lập kế hoạch cho toàn bộ nền kinh tế.

- Gọi lượng đầu ra của n ngành lần lượt là x_1, x_2, K, x_n ; yêu cầu cuối cùng cho đầu ra của ngành thứ i (còn gọi là yêu cầu cuối cùng của ngành mở đối với ngành thứ i) là d_i với $i = \overline{1, n}$.
- Giả sử ngành thứ i sản xuất một lượng đầu ra x_i vừa đủ để đáp ứng những điều kiện đầu vào của n ngành và đáp ứng yêu cầu cuối cùng của ngành mở. Khi đó, ta có:

$$(I_n - A).X = D \quad (*)$$

trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n , A là ma trận các hệ số đầu vào, X là vectơ cột của lượng đầu ra, D là vectơ cột biểu thị các yêu cầu cuối cùng của ngành mở.

Từ (*), ta tìm được nghiệm $X = (I_n - A)^{-1} \cdot D$

Chú ý: ta có thể tìm X từ (*) bằng phương pháp Cramer.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Tính } D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \text{nên hệ có nghiệm duy nhất.}$$

Ta có

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

Áp dụng công thức Cramer, ta tính được nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = 1 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -2 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 3 \end{cases}$$

Cách khác: Hệ phương trình được viết dưới dạng

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{Vì } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{nên } X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ là } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải:

Cách 1: Biến đổi ma trận:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1]{d_3 \rightarrow d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right)$$

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11 \\ -7x_2 + 11x_3 = -25 \\ 4x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Cách 2: Dùng phương pháp Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$$

Nên hệ phương trình đã cho là hệ Cramer, do đó hệ có nghiệm duy nhất.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -56$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 28$$

$$\text{Nghiem duy nhất của hệ là: } \begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = 1 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = -1 \end{cases}$$

Cách 3: Dùng phương pháp tính ma trận nghịch đảo.

Hệ đã cho được viết dưới dạng: $AX = B$ (1)

$$\text{trong đó } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ta có: $|A| = -28 \neq 0$

$$\text{Ta tính được } A^{-1} = \frac{1}{-28} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -8 & -7 & -11 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ (1) cho ta: } X = A^{-1}B = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -8 & -7 & -11 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải: Xét ma trận hệ số mở rộng $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right)$

Bằng kiến thức trong các phần trước, ta tính được

$$r(\bar{A}) = 2 \text{ và } r(A) = 2$$

Vì $r(A) = r(\bar{A}) = 2 \neq$ số ẩn $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm và nghiệm của hệ phụ thuộc vào hai tham số.

Nếu chọn x_3 và x_4 làm các tham số thì ta có hệ phương trình tuyến tính sau đây:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6 - 3x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (1')$$

Ta giải hệ (1') như sau (với x_1 và x_2 là các ẩn số).

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 - 3x_3 - x_4 & 7 \\ 4 - 2x_3 - 2x_4 & 5 \end{vmatrix} = -x_3 + 9x_4 + 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 - 3x_3 - x_4 \\ 3 & 4 - 2x_3 - 2x_4 \end{vmatrix} = 5x_3 - x_4 - 10$$

Vậy nghiệm của (1') là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{x_3 - 9x_4 - 2}{11} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5x_3 + x_4 + 10}{11} \end{cases}$$

Kết luận: hệ (1) có vô số nghiệm, các nghiệm ấy phụ thuộc vào hai tham số x_3, x_4 . Nghiệm tổng quát của hệ (1) là

$$X = \begin{pmatrix} \frac{x_3 - 9x_4 - 2}{11} \\ \frac{-5x_3 + x_4 + 10}{11} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ với } \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải: Xét ma trận hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 1 \end{array} \right)$$

Bằng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận, ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \overline{A} &\xrightarrow{d_1 \rightarrow d_1 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{array}{l} d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - 4d_1 \\ d_4 \rightarrow d_4 - 5d_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -19 & -2 & 2 \\ 0 & 10 & -19 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -19 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[d_4 \rightarrow d_4 - d_2]{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -19 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -19 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow r(\bar{A}) = 3 \neq r(A) = 2$$

Do đó, hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau đây theo tham số m

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải: Xét định thức của ma trận hệ số

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2 (m+2)$$

- Trường hợp $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, m \neq -2$: hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất

$$\left(x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \right)$$

$$\text{Ta có } D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = -(1-m)^2(1+m)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = (1-m)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)^2$$

$$\text{Vậy, nghiệm duy nhất là } \left(x = -\frac{m+1}{m+2}, y = \frac{1}{m+2}, z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \right)$$

▪ Trường hợp $D=0 \Leftrightarrow m=1$ hay $m=-2$

✓ Nếu $m=1$: ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Hệ tương đương với phương trình $x + y + z = 1$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào hai tham số. Nghiệm tổng quát là

$$X = (1 - y - z, y, z)^T \text{ với } \forall y, z \in \mathbb{R}$$

✓ Nếu $m = -2$:

Khi đó ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình có dạng như sau

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Bằng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận, ta có

$$\bar{A} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \rightarrow d_2 - d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 + 2d_1}]{d_1 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Ta thấy $r(\bar{A}) = 3 \neq r(A) = 2$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- $m \neq 1, m \neq -2$: nghiệm duy nhất $\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right)$
- $m = 1$: nghiệm tổng quát $(1 - y - z, y, z)$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- $m = -2$: vô nghiệm.

Bài 6: Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau đây theo tham số m

$$\begin{cases} mx + y + z = m \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = m+1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

Giải:

Gọi A là ma trận hệ số thì ta có

$$D = |A| = (m-1)^2 (m+2)^2$$

Giải tương tự bài trên, ta có

- $m \neq 1, m \neq -2$: có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m+1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2}, \frac{-1}{m+2} \right)$
- $m=1$: có nghiệm tổng quát $(-y-z+1, y, z)$ với $x, y, z \in \mathbb{R}$
- $m=-2$: vô nghiệm.

Bài 7: Giải và biện luận hệ phương trình sau đây theo các tham số a và b

$$\begin{cases} bx + ay + z = 1 \\ (2b-1)x + ay + 3z = 1 \\ bx + ay + (b+3)z = 1 \end{cases}$$

Giải:

Gọi A là ma trận hệ số thì ta có

$$D = |A| = a(b+2)(1-b)$$

- Trường hợp $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 1, b \neq -2$:

Lúc này, hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x, y, z) = \left(x = 0, y = \frac{1}{a}, z = 0 \right)$$

- Trường hợp $D = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = -2 \vee b = 1$

✓ $a = 0, b \neq -2, b \neq 1$: vô nghiệm

✓ $a = 0, b = 1$: nghiệm tổng quát là $(1, y, 0), y \in \mathbb{R}$

✓ $a = 0, b = -2$: nghiệm tổng quát là $(1, y, 3), y \in \mathbb{R}$

✓ $a \neq 0, b = 1$: nghiệm tổng quát là $(1 - ay, y, 0), y \in \mathbb{R}$

✓ $a \neq 0, b = -2$: nghiệm tổng quát $\left(\frac{4z}{3}, \frac{3+z}{3a}, z \right), z \in \mathbb{R}$

Bài 8: Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = a \\ x + (m+1)y + (m+1)z = b \end{cases}$$

- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất.
- Tìm a, b để hệ đã cho có nghiệm với mọi giá trị của m .

Giải:

(a.) Vì hệ phương trình có số phương trình bằng số ẩn, nên muốn hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì hệ phải là hệ Cramer, nghĩa là:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$

(b.) Ta có:

- Trường hợp $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$: hệ đã cho là hệ Cramer nên hệ có nghiệm duy nhất với mọi a, b
- Trường hợp $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$:

$$\otimes \quad m=1: \text{Ma trận hệ số mở rộng là } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2 & b \end{array} \right)$$

$$L \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\checkmark \quad a \neq 1, b \in \mathbb{R} : r(A) = 2 \neq r(\bar{A}) = 3$$

$$\checkmark \quad a = 1, b \in \mathbb{R} : r(A) = r(\bar{A}) = 2 \neq \text{số ẩn}$$

Nên hệ có nghiệm khi $a \neq 1, b \in \mathbb{R}$

$$\otimes \quad m = -1: \text{Ma trận } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$$

$$L \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+2b-1 \end{array} \right)$$

$$\checkmark \quad -a+2b-1 \neq 0 : r(A) = 2 \neq r(\bar{A}) = 3$$

$$\checkmark \quad -a+2b-1 = 0 : r(A) = r(\bar{A}) = 2 \neq \text{số ẩn}$$

Nên hệ có nghiệm khi $-a+2b-1=0$

$$\text{Vậy, hệ có nghiệm với } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -a+2b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \end{cases}$$

$$\textbf{Giải:} \text{ Ma trận hệ số mở rộng là } \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \end{array} \right)$$

Ta có

$$\bar{A} \xrightarrow[d_3 \rightarrow d_3 - d_1]{d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 + d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array} \right)$$

Ta có

- $m \neq 5$: $r(\bar{A}) = 3 \neq r(A) = 2$
- $m = 5$: $r(\bar{A}) = r(A) = 2$

Vậy, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow r(\bar{A}) = r(A)$

$$\Leftrightarrow m = 5$$

Bài 10. Giải và biện luận phương trình hệ phương trình tuyến tính sau đây bằng phương pháp Gauss theo tham số m

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải: Dùng các phép biến đổi Gauss trên ma trận hệ số mở rộng.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow d_2 - md_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[d_2 \rightarrow -d_2]{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 + (m+1)d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1+m)^2(1-m) \end{array} \right)$$

Biện luận:

♦ $m \neq 1, m \neq -2$: hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = -\frac{m+1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}$$

♦ $m=1$: ta có $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow R(\bar{A}) = R(A) = 1 \neq$ số ẩn, nên hệ có vô nghiệm và nghiệm

tổng quát $X = \begin{pmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ với $y, z \in \mathbb{R}$

$$\blacklozenge \text{ m} = -2 : \text{ta có: } \bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow R(\bar{A}) = 3 \neq R(A) = 2$ nên hệ vô nghiệm.

Bài 11: Hãy tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải: Đây là hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất*.

$$\text{Ma trận hệ số là } A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \end{array} \right)$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận, ta có

$$A \xrightarrow[d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1]{d_2 \rightarrow d_2 - d_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow R(A) = 2 < \text{số ẩn}$$

$\Rightarrow$ hệ đã cho có vô số nghiệm.

Chọn x_3 và x_4 làm ẩn tự do, ta giải được:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ với } x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Bài 12: Một nhà buôn cà phê trộn 3 loại cà phê I, II, III với nhau, có giá lần lượt là 2, 3, 6 (đơn vị tính là \$) cho một kg, để có được 100 kg loại cà phê có giá là 4\$ / kg. Người này sử dụng một lượng cà phê giống nhau cho hai loại cà phê II và III. Hãy xác định lượng cà phê (tính bằng kg) cho mỗi loại cà phê cần sử dụng để pha trộn.

Giải: Gọi x , y , z lần lượt là lượng cà phê loại I, II, III.

Từ đề bài, ta lập được một hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x + 3y + 6z = 400 \quad (*) \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Giải hệ (*) bằng phương pháp Cramer, ta thu được:
$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \\ z = 40 \end{cases}$$

Vậy, cần phải có 20kg cà phê loại I, 40kg cà phê loại II và 40kg cà phê loại III.

Bài 13: Một bệnh nhân được chỉ định phải uống ba loại vitamin A, B, C với hàm lượng là 7, 4, 18. Có ba loại thuốc bổ nhãn hiệu X, Y, Z mà mỗi loại thuốc đều chứa các loại vitamin trên. Biết rằng mỗi viên thuốc X chứa hàm lượng vitamin A, B, C lần lượt là 1, 1, 3; mỗi viên thuốc Y chứa hàm lượng vitamin A, B, C lần lượt là 1, 2, 4; mỗi viên thuốc Z chứa hàm lượng vitamin A, B, C lần lượt là 1, 0, 2.

- Tìm tất cả cách kết hợp số viên thuốc X, Y, Z cần mua thỏa chỉ định.
- Cho biết đơn giá cho mỗi viên thuốc X, Y, Z lần lượt là 6, 5, 4 (đơn vị tiền). Tìm cách kết hợp số viên thuốc X, Y, Z cần mua thỏa chỉ định sao cho chi phí bé nhất.

Giải:

(a.) Gọi x, y, z lần lượt là số viên thuốc loại X, Y, Z.
Lưu ý rằng x, y, z là các số nguyên không âm.

Từ giả thiết, ta lập được hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + 2y = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 18 \end{cases} \quad (*)$$

Ta giải hệ (*) bằng phương pháp Gauss.

Ma trận hệ số mở rộng của hệ (*):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{d_3 \rightarrow d_3 - 3d_1}]{d_2 \rightarrow d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{d_3 \rightarrow d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ta thấy: $R(\overline{A}) = R(A) = 2 \neq$ số ẩn. Nên hệ (*) có vô số nghiệm, và nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = 10 - 2z \geq 0 \\ y = z - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{với } z \text{ là số nguyên không âm}$$

Vì $x = 10 - 2z \geq 0$ và $y = z - 3 \geq 0$ nên ta có $3 \leq z \leq 5$. Do đó, $z \in \{3, 4, 5\}$

Do vậy, các cách kết hợp tìm được là

	x	y	z
Cách kết hợp 1 :	4	0	3
Cách kết hợp 2 :	2	1	4
Cách kết hợp 3 :	0	2	5

(b.) Ta có chi phí là $f(x, y, z) = 6x + 5y + 4z$

✓ Với cách kết hợp 1 ($x = 4, y = 0, z = 3$) thì $f = 36$

✓ Với cách kết hợp 2 ($x = 2, y = 1, z = 4$) thì $f = 33$

✓ Với cách kết hợp 3 ($x = 4, y = 0, z = 3$) thì $f = 30$

Vậy, ta chọn cách kết hợp 3 để có chi phí thấp nhất.

Một cách giải tham khảo khác:

Hàm chi phí là $f(x, y, z) = 6x + 5y + 4z$ trong đó x, y, z thỏa hệ phương trình (*).

Ta có:

$$f(x, y, z) = 6(x + y + z) - (y - z) - 3z = 45 - 3z$$

Vì x, y, z thỏa mãn hệ phương trình (*) nên $x + y + z = 7$ và $y - z = -3$ nên suy ra : $f(x, y, z) = 45 - 3z$

Theo câu (a.), ta có $3 \leq z \leq 5$ nên $-15 \leq -3z \leq -9$. Do đó:

$$f \geq 45 - 15 = 30$$

Vậy, $f_{\min} = 30 \Leftrightarrow (x = 4, y = 0, z = 3)$

Bài 14: Thị trường có ba loại hàng hóa. Hàm cung và hàm cầu của ba loại hàng trên lần lượt là

$$Q_{S_1} = 18P_1 - P_2 - P_3 - 45 \quad ; \quad Q_{D_1} = -6P_1 + 2P_2 + 130$$

$$Q_{S_2} = -P_1 + 13P_2 - P_3 - 10 \quad ; \quad Q_{D_2} = 2P_1 - 7P_2 + P_3 + 220$$

$$Q_{S_3} = -P_1 - P_2 + 10P_3 - 15 \quad ; \quad Q_{D_3} = 3P_2 - 5P_3 + 215$$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

Giải: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} E_1 = Q_{S_1} - Q_{D_1} = 0 \\ E_2 = Q_{S_2} - Q_{D_2} = 0 \\ E_3 = Q_{S_3} - Q_{D_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24P_1 - 3P_2 - P_3 = 175 \\ -3P_1 + 20P_2 - 2P_3 = 230 \quad (*) \\ -P_1 - 4P_2 + 15P_3 = 230 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (*) bằng phương pháp Cramer. Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 24 & -3 & -1 \\ -3 & 20 & -2 \\ -1 & -4 & 15 \end{vmatrix} = 6835 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 175 & -3 & -1 \\ 230 & 20 & -2 \\ 230 & -4 & 230 \end{vmatrix} = 68350$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 24 & 175 & -1 \\ -3 & 230 & -2 \\ -1 & 230 & 15 \end{vmatrix} = 102525$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 24 & -3 & 175 \\ -3 & 20 & 230 \\ -1 & -4 & 230 \end{vmatrix} = 136700$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} P_1 = \frac{D_1}{D} = 10 > 0 \\ P_2 = \frac{D_2}{D} = 15 > 0 \\ P_3 = \frac{D_3}{D} = 20 > 0 \end{cases}$$

Vì $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$ và ta thay $P_1 = 10$, $P_2 = 15$, $P_3 = 20$ vào Q_{D_1} , Q_{D_2} , Q_{D_3} ta có:

$$Q_{D_1} = 100 > 0, Q_{D_2} = 155 > 0, Q_{D_3} = 145 > 0$$

nên giá cân bằng là: $P_1 = 10$, $P_2 = 15$, $P_3 = 20$.

Do đó điểm cân bằng thị trường là $(10, 15, 20)$.

Bài 15: Trong mô hình Input – Output Mở Leontief, biết ma trận đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

- Nói ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23} .
- Tính và nói ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{03} .

- c. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành, biết rằng ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng 70, 100, 30.

Giải:

a. Ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{23} = 0,3$ là cần một lượng hàng hóa thứ 2 (nguyên liệu thứ 2) trị giá 0,3 (đơn vị tiền) để sản xuất một lượng hàng hóa thứ 3 trị giá 1 (đơn vị tiền).

b. Ta có: $a_{03} = 1 - (a_{13} + a_{23} + a_{33}) = 0,4$, nghĩa là ngành mở đóng góp 0,4 (đơn vị tiền) cho ngành 3 để ngành 3 sản xuất một lượng hàng trị giá 1 (đơn vị tiền).

c. Ta gọi I_3 là ma trận đơn vị cấp 3, A là ma trận hệ số đầu vào và D là nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với ba ngành, X là vectơ ở dạng cột biểu thị giá trị sản lượng của ba ngành.

Ta có: $(I_3 - A)X = D$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Ta giải hệ phương trình (*) bằng phương pháp Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,352 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 70 & -0,1 & -0,1 \\ 100 & 0,8 & -0,3 \\ 30 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 52,8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,7 & 70 & -0,1 \\ -0,1 & 100 & -0,3 \\ -0,2 & 30 & 0,8 \end{vmatrix} = 70,4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 52,8$$

Vậy, giá trị sản lượng của ba ngành là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 150 > 0 \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 200 > 0 \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 150 > 0 \end{cases}$$

Bài 16: Xét mô hình Input – Output Mở Leontief, gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

- a. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành, biết rằng nhu cầu của ngành mở đối với ba ngành là $(75, 90, 81)$.
- b. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành với điều kiện bổ sung: do cải tiến kỹ thuật ở ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 2, còn nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với ba ngành là vẫn là $(75, 90, 81)$.

Giải:

(a.) Gọi X là vector biểu thị giá trị sản lượng của ba ngành, ta có:

$$(I_3 - A)X = D$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 90 \\ 81 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Giải hệ (*) bằng phương pháp Cramer, ta tìm được giá trị sản lượng của ba ngành là

$$\begin{cases} x_1 = 240 \\ x_2 = 270 \\ x_3 = 300 \end{cases}$$

(b.) Do cải tiến kỹ thuật ngành 1 nên nguyên liệu ngành thứ 2 cung cấp cho ngành 1 được giảm 25%. Như vậy, lúc đầu chưa cải tiến thì $a_{21} = 0,4$, sau khi cải tiến kỹ thuật thì $a_{21} = 0,3$.

Ta có ma trận các hệ số đầu vào mới như sau (sau khi đã cải tiến kỹ thuật)

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Ta có: $(I_3 - A)X = D$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 90 \\ 81 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Giải hệ (**) bằng phương pháp Cramer, ta tìm được giá trị sản lượng của ba ngành là

$$\begin{cases} x_1 \approx 221,899 \\ x_2 \approx 230,477 \\ x_3 \approx 277,877 \end{cases}$$

Bài 17: Trong mô hình Input – Output Mở Leontief, biết ma trận đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

- Khi ngành 3 phải cung cấp 600 (đơn vị tiền) cho ngành 2 thì giá trị sản lượng của ngành 2 là bao nhiêu?
- Hãy tính ma trận $(I - A)^{-1}$
- Giả sử nhu cầu cuối cùng của ngành mở đối với ba

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế
 ngành lần lượt là d_1 , d_2 , d_3 . Nếu d_1 tăng 2 (đơn vị tiền), d_2 giảm 1 (đơn vị tiền), d_3 giảm 1 (đơn vị tiền) thì giá trị sản lượng của ba ngành thay đổi thế nào?

Giải:

$$(a.) x_2 = \frac{600}{a_{32}} = 1500$$

$$(b.) \text{Đáp số: } (I - A)^{-1} = \frac{1}{0,24} \begin{pmatrix} 0,44 & 0,15 & 0,19 \\ 0,20 & 0,45 & 0,25 \\ 0,24 & 0,30 & 0,54 \end{pmatrix}$$

(c.) Ta gọi

$$\blacksquare \text{ Sự thay đổi của ba ngành là } \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

▪ Sự thay đổi của nhu cầu cuối cùng của ngành mở là

$$\Delta D = \begin{pmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Thì } \Delta X = (I - A)^{-1} \cdot \Delta D = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -1,25 \\ -1,50 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ -x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

- Tìm nghịch đảo của ma trận hệ số.
- Giải hệ phương trình trên.

2. Xét xem hệ phương trình sau có nghiệm hay không?

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = m \end{cases}$$

4. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\text{a. } \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x - 7y + 4z = -5 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 16x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

5. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = 6 \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} x + 2by + z = 4 \\ 2x + 3by + 2z = 7 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x + a_1y + a_1^2z = a_1^3 \\ x + a_2y + a_2^2z = a_2^3 \\ x + a_3y + a_3^2z = a_3^3 \end{cases}$$

6. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 6x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$$

8. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + (m+2)y + 5z = 1 \\ x + (m+1)y + (m+2)z = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

- a. Tìm m để hệ đã cho là hệ Cramer. Tìm nghiệm trong trường hợp đó.
- b. Tìm m để hệ đã cho vô nghiệm.

9. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + (m - 4)y + 7z = 0 \\ -x + (m + 2)y + (m - 1)z = 0 \end{cases}$$

- a. Tìm m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.
- b. Với $m = 0$, hãy tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho.

10. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + (m + 5)y - 2z = 4 \\ x + (m + 3)y + (m - 1)z = m + 3 \end{cases}$$

- a. Tìm m để hệ đã cho vô nghiệm.
- b. Tìm m để hệ đã cho có vô số nghiệm. Hãy nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

11. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + (m + 3)y + 7z = 2 \\ x + (m + 1)y + (m + 1)z = m - 2 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

12. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + (m-1)y + 5z = 3 \\ x + my + (m+3)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp đó.

13. Cho hệ phương trình tuyến tính
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \quad \text{(I). Khi}$$

đó, hệ (I) là hệ Cramer khi và chỉ khi

- a. $a \neq 1$
- b. $a \neq 2$
- c. $a = 1$ hoặc $a = 2$
- d. $a \neq 1$ và $a \neq 2$

14. Cho hệ phương trình tuyến tính
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \\ a^2x + 3ay = 4 \end{cases} \quad \text{(I). Khi}$$

đó, hệ (I) có đúng một nghiệm khi và chỉ khi

- a. $a = 1$
- b. $a = -4$
- c. $a = 1$ hoặc $a = -4$
- d. $a \neq 1$ và $a \neq -4$

15. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3+m \\ 2x + my - 3z = m-1 \\ 2x - my + 2mz = -2 \end{cases} \quad (I)$$

Cho biết $(x = 1, y = 1, z = 1)$ thỏa hệ (I). Chọn mệnh đề đúng

- a. $m = -4$ và hệ (I) có vô số nghiệm
- b. $m = -4$ và hệ (I) có nghiệm duy nhất
- c. $m = -2$ và hệ (I) có vô số nghiệm
- d. $m = -4$ và hệ (I) có nghiệm duy nhất

16. Xét thị trường có ba loại hàng. Biết hàm cung và hàm cầu của ba loại hàng trên lần lượt là

$$Q_{S_1} = 6P_1 - 2P_3 - 60 \quad ; \quad Q_{D_1} = 120 - 5P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -P_1 + 9P_2 - P_3 - 30 \quad ; \quad Q_{D_2} = 160 + P_1 - 6P_2 + P_3$$

$$Q_{S_3} = -2P_1 + 8P_3 - 20 \quad ; \quad Q_{D_3} = 140 + P_2 - 4P_3$$

Tìm giá bán tại điểm cân bằng thị trường.

17. Xét thị trường có ba loại hàng. Biết hàm cung và hàm cầu ba loại hàng trên lần lượt là

$$Q_{S_1} = 9P_1 - P_2 - 170 \quad ; \quad Q_{D_1} = 1880 - 8P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q_{S_2} = 12P_2 - P_3 - 500 \quad ; \quad Q_{D_2} = 2070 + P_1 - 10P_2 + P_3$$

$$Q_{S_3} = -P_1 - P_2 + 10P_3 - 510 \quad ; \quad Q_{D_3} = 2140 + P_2 - 8P_3$$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

18. Trong mô hình Input – Output Mở Leontief, biết ma trận đầu vào như sau

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

- Nói ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{21} = 0,3$.
- Biết sản lượng của ngành 2 là 100, tính giá trị của lượng nguyên liệu mà các ngành cung cấp cho nó.
- Tìm ma trận nghịch đảo của $I_3 - A$.
- Tìm mức sản lượng của ba ngành, nếu ngành mở yêu cầu ba ngành trên phải cung cấp cho nó những lượng sản phẩm trị giá tương ứng $(39, 49, 16)$.
- Nếu yêu cầu xuất khẩu dự trữ thay đổi đối với các ngành lần lượt là $\Delta D = (3, -2, 0)$, hãy tính mức thay đổi sản lượng của các ngành.

19. Trong mô hình Input – Output Mở Leontief, biết ma trận hệ số đầu vào như sau

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

Yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành kinh tế lần lượt là 118, 52, 96.

- Tính và nói ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{02} .

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

- b. Tìm giá trị sản lượng của ba ngành đáp ứng được yêu cầu của ngành mở đã cho ở trên.
- c. Khi ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 2, còn yêu cầu của ngành mở đối với 3 ngành không thay đổi, hãy tính giá trị sản lượng của ba ngành.

20. Xét mô hình Input – Output mở Leontief gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & m & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

- a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{23} . Từ đó tính số tiền mà ngành 2 phải đóng góp cho ngành 3 khi giá trị đầu ra của ngành 3 là 200 (đơn vị tiền).
- b. Giải thích ý nghĩa kinh tế của hệ số a_{03} . Từ đó suy ra ngành mở phải đóng góp bao nhiêu cho ngành 3 khi giá trị sản lượng của ngành 3 là 1000 (đơn vị tiền).
- c. Hãy tìm giá trị của m , biết rằng ngành mở phải đóng góp 150 (đơn vị tiền) cho ngành 2 khi giá trị sản lượng của ngành 2 là 500 (đơn vị tiền).
- d. Với $m=0,4$ hãy tìm giá trị sản lượng của ba ngành nếu biết yêu cầu của ngành mở đối với ba ngành lần lượt là 66, 124, 100.

21. Xét mô hình Input – Output mở Leontief gồm ba ngành với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

- a. Tìm ma trận $(I - A)^{-1}$
- b. Hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của các phần tử trong cột thứ 1 của ma trận $(I - A)^{-1}$. Hướng dẫn: Xét $\Delta D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, rồi từ đó suy ra được kết quả.
- c. Hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của các phần tử trong cột thứ 2, cột thứ 3 của ma trận $(I - A)^{-1}$.

Chương III

HÀM MỘT BIẾN GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

A. GIỚI HẠN CỦA HÀM MỘT BIẾN

Mệnh đề: Cho I là khoảng mở chứa x_0 . Hàm số f xác định trên I (hoặc xác định trên $I \setminus \{x_0\}$). Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Khi đó:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [kf(x)] = kL$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = LM$

iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (điều kiện $M \neq 0$)

v) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in I \setminus \{x_0\}$)

Mệnh đề: Cho I là khoảng mở chứa x_0 . Hàm số f, g xác định trên I (hoặc xác định trên $I \setminus \{x_0\}$) và

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \end{cases} \text{ thì } L \geq M$$

Mệnh đề (định lý kẹp):

Cho I là khoảng mở chứa x_0 . Hàm số f, g, h xác định trên I (hoặc xác định trên $I \setminus \{x_0\}$) và $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

Chú ý: Các mệnh đề trên cũng đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$ hay $x \rightarrow \pm\infty$

Mệnh đề:

a. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow [f(x) + g(x)] \rightarrow +\infty$

b. $f(x) \rightarrow -\infty, g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow [f(x) + g(x)] \rightarrow -\infty$

c. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x).g(x) \rightarrow +\infty$

d. $f(x) \rightarrow -\infty, g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x).g(x) \rightarrow +\infty$

e. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x).g(x) \rightarrow -\infty$

f. $f(x) \rightarrow c > 0, g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x).g(x) \rightarrow +\infty$

g. $f(x) \rightarrow c < 0, g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x).g(x) \rightarrow -\infty$

h. $f(x) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$

$$i. \quad f(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|f(x)|} \rightarrow +\infty$$

$$j. \quad f(x) \leq g(x) \text{ và } f(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow g(x) \rightarrow +\infty$$

$$k. \quad f(x) \leq g(x) \text{ và } g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

Nhận xét: Ta không có kết luận tổng quát trong các trường hợp sau đây

$$f(x) + g(x) \quad \text{khi} \quad f(x) \rightarrow +\infty \text{ và } g(x) \rightarrow -\infty$$

$$f(x).g(x) \quad \text{khi} \quad f(x) \rightarrow 0 \text{ và } g(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{khi} \quad f(x) \rightarrow 0 \text{ và } g(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{khi} \quad f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ và } g(x) \rightarrow \pm\infty$$

Các trường hợp trên là các dạng vô định:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$$

○ Một vài giới hạn thường gặp:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (\text{giả sử } a_n b_m \neq 0)$$

$$= \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{khi } n = m \\ 0 & \text{khi } m > n \\ +\infty & \text{khi } n > m, a_n b_m > 0 \\ -\infty & \text{khi } n > m, a_n b_m < 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0 \quad (\text{nếu } a > 1)$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ 0 & (0 < a < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & (a > 1) \\ +\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & (a > 1) \\ +\infty & (a < 1) \end{cases}$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$j) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

○ Cách khử dạng vô định 1^∞ :

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ trong đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$$

Cách 1:

$$\text{Ta có: } [f(x)]^{g(x)} = \left\{ [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right\}^{g(x)[f(x) - 1]}$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)[f(x) - 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1]}$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow x_0} [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x) - 1}} = e \quad (\text{do } \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e)$$

Cách 2: Đặt $y = [f(x)]^{g(x)} > 0$

$$\Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)] = g(x) \cdot \ln[1 + f(x) - 1]$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1 + f(x) - 1]}{f(x) - 1} = 1 \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(g(x) \frac{\ln[1 + f(x) - 1]}{f(x) - 1} [f(x) - 1] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)[f(x) - 1]) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} y = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)[f(x) - 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1]}$$

○ Các đại lượng tương đương:

Định nghĩa:

i) Cho I là khoảng mở chứa x_0 . Các hàm f, g xác định trên I (hoặc xác định trên $I \setminus \{x_0\}$). Ta nói: f tương đương với g

khi x tiến về x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Khi đó, ta ký hiệu: $f \sim g$ khi $x \rightarrow x_0$.

ii) Cho f và g xác định trên $I = (\alpha, +\infty)$. Ta nói: f tương đương với g khi $x \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Khi đó, ta ký hiệu

$f \sim g$ khi $x \rightarrow +\infty$.

iii) Cho f và g xác định trên $I = (-\infty, \alpha)$. Ta nói: f tương đương với g khi $x \rightarrow -\infty$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Khi đó, ta ký hiệu

$f \sim g$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Hệ quả: Cho $f \sim f_1$ và $g \sim g_1$ khi $x \rightarrow x_0$

(hoặc $f \sim f_1$ và $g \sim g_1$ khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $f \sim f_1$ và $g \sim g_1$ khi $x \rightarrow -\infty$)

Khi đó, ta có :

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x).g_1(x)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

(hoặc thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$)

+ Chú ý rằng có khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] \neq \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm g_1(x)]$$

+ Cho $f : f_1$ và $g : g_1$ khi $x \rightarrow x_0$ và các hàm f , g cùng dương hoặc cùng âm trong lân cận của x_0 . Khi đó, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + g_1(x)]$$

➤ **Một số kết quả thường dùng:**

i) $\sin x : x$ khi $x \rightarrow 0$

ii) $1 - \cos x : \frac{x^2}{2}$ khi $x \rightarrow 0$

iii) $\ln(1+x) : x$ khi $x \rightarrow 0$

iv) $e^x - 1 : x$ khi $x \rightarrow 0$

v) $\sqrt[n]{1+x} - 1 : \frac{x}{n}$ khi $x \rightarrow 0$

□ BÀI TẬP

Bài 1 : Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \left(\frac{0}{0} \right)$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cách làm SAI:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 \cos^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

(sai vì sử dụng định lý tương đương về giới hạn ở tổng số)

Dấu “=” trong đẳng thức

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 \cos^2 x}{x^4}$$

là sai vì trên tử số là một tổng số nên không thể thay $\sin^2 x$ thành x^2 được. Dưới mẫu thay $x^2 \sin^2 x = x^4$ là đúng.

Bài 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + \sin^2(3x)]}{\operatorname{tg}^2(5x)} \left(\frac{0}{0} \right)$

Giải:

$$\text{Ta có : } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\operatorname{tg}^2(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{(5x)^2} = \frac{9}{25}$$

Chú ý về vô cùng bé – vô cùng lớn:

Ta có khi $x \rightarrow \pm \infty$ thì

$$f = x^2 + 5 : f_1 = x^2$$

$$\text{và } g = -x^2 + 3 : g_1 = -x^2$$

Nhưng

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f + g) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^2 + 5 - x^2 + 3) = 8$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^2 - x^2) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f_1 + g_1) = 0$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3x^2 + 7x + 5}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 + 7x + 5}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

2. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

d. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

e. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot gx - \cot ga}{x - a}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

3. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot g^2 x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

4. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x} \quad (a > 0)$

b. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

5. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^2}$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$$

6. Tính các giới hạn sau

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

7. Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(1 + x) - \ln x]$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 5^x}{1 - e^x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1 + x)}$

i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0)$

8. Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 5-} 10^{\frac{1}{x-5}}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + a}{x + b} \right)^{x + c}$

d. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \sin(x^2 - x) \right]^{\frac{1}{x}}$

9. Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{1 - \sqrt[7]{1 + x}}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3-2x)}{\ln(2-x)}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1-x)^3} - 1}{\sqrt[3]{(1+x)^5} - 1}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+4x} - 2}$

10. Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\ln x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1-4x)}$

B. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

1. Định nghĩa:

• Hàm số f được gọi là *liên tục tại* x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• Nếu có đẳng thức

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ (hay } f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0))$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế
thì ta nói f liên tục trái (hay liên tục phải) tại điểm x_0 .

- Hàm số f được gọi là liên tục trong (a,b) khi f liên tục tại mọi $x \in (a,b)$.
- Hàm số f được gọi là liên tục trên $[a,b]$ khi f liên tục trong (a,b) , liên tục bên phải tại a , liên tục bên trái tại b .
- Nếu f không liên tục tại điểm x_0 thì x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của f .

2. Định lý:

- a. Điều kiện cần và đủ để hàm f liên tục tại x_0 là:

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$$

- b. Nếu hàm f và hàm g liên tục tại x_0 thì các hàm:

$$f \pm g; f \cdot g; \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0) \text{ cũng liên tục tại } x_0.$$

- c. Nếu hàm f liên tục tại x_0 và g liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì hàm $g \circ f$ cũng liên tục tại x_0 .

Đặc biệt: Các hàm số sơ cấp sẽ liên tục trên khoảng mở mà nó xác định.

3. Các tính chất của hàm liên tục:

Cho hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$, ta có :

- a. Hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$.

- b. Hàm f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Đặc biệt, nếu $f(a).f(b) < 0$ thì ta tìm được giá trị $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$ hay phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $c \in (a, b)$.

Chú ý:

Để chứng minh f liên tục tại x_0 , ta chứng minh :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì f liên tục bên phải tại x_0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì f liên tục bên trái tại x_0 .
- f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow f$ liên tục phải và liên tục trái tại x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

□ BÀI TẬP

Bài 1: Xét tính liên tục tại $x_0 = 0$ của các hàm số sau đây

a. $y_1 = f(x) = \frac{\sin x}{x}$

b. $y_2 = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$$c. y_3 = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Giải:

a. Xét $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, hàm không xác định tại $x_0 = 0$ nên không liên tục tại $x_0 = 0 \Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0$.

$$b. \text{ Xét } y_2 = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$$

Vậy y_2 gián đoạn tại $x_0 = 0$.

$$c. y_3 = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0) = 0$$

Vậy y_3 liên tục tại $x_0 = 0$.

Bài 2: Xét tính liên tục của hàm số sau đây tại điểm $x_0 = 0$

$$\text{a. } y_1 = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } y_2 = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{a. Giả sử } x_n = \frac{1}{n\pi}, \quad x'_n = \frac{2}{\pi(1+4n)} \quad (n=1,2,\dots)$$

vì khi $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow 0$, $x'_n \rightarrow 0$ và $f(x_n) \rightarrow 0$, $f(x'_n) \rightarrow 1$ nên giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ không tồn tại. Từ đó suy ra hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0$.

$$\text{b. Do } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0$$

Vậy hàm y_2 liên tục tại $x_0 = 0$.

Bài 3 : Xét sự liên tục tại $x_0 = 1$ của hàm

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Vì } f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ hàm f không liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\pi & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Chứng minh:

hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải:

+ Ta có f là hàm sơ cấp khi $x \neq 1 \Rightarrow f$ liên tục với $\forall x \neq 1$.

+ Tại $x = 1$:

$$f(1) = -\pi$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

Đặt $u = x - 1 \Leftrightarrow x = u + 1$. Khi $x \rightarrow 1$ thì $u \rightarrow 0$.

Lúc ấy, ta có:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin[\pi(u+1)]}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin[\pi u + \pi]}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi u}{u} = -\pi = f(1)$$

$\Rightarrow f$ liên tục tại $x = 1$.

Vậy, hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 5 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x < 0 \\ a + x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm a để

hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải:

Miền xác định của f là $\forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu $x < 0 \Rightarrow f(x) = e^x$ là hàm số sơ cấp nên liên tục.

+ Nếu $x > 0 \Rightarrow f(x) = a + x$ là hàm số sơ cấp nên liên tục.

+ Nếu $x = 0$, ta có :

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x) = a$$

$$f(0) = a$$

Nên hàm số liên tục tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow f(0) = f(0^+) = f(0^-)$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1$

Bài 6: Xét sự liên tục của các hàm sau đây

$$a. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{b. } g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Giải:

a. Xét hàm $f(x)$

+ Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2$ là hàm sơ cấp nên liên tục.

+ Nếu $1 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x^2$ là hàm sơ cấp nên liên tục.

+ Tại $x=1$, ta có :

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x^2) = 1$$

$$f(1) = 1$$

Vì $f(1) = f(1^+) = f(1^-)$ nên hàm số f liên tục tại $x_0 = 1$

Vậy hàm f liên tục trên $[0, 2]$.

b. Xét hàm $g(x)$

$$\text{Ta có : } g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{khi } x < -1 \\ x-1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Các hàm $\cos \frac{\pi x}{2}$; $1-x$; $x-1$ là các hàm sơ cấp nên liên tục.

Vậy hàm g liên tục $\forall x \neq \pm 1$

+ Tại $x_0 = 1$, ta có: $g(1) = g(1^+) = g(1^-) = 0$

$\Rightarrow g$ liên tục tại $x_0 = 1$

+ Tại $x_0 = -1$, ta có: $g(-1^+) = 0 \neq g(-1^-) = 2$

$\Rightarrow g$ gián đoạn tại $x_0 = -1$

Kết luận : hàm g liên tục $\forall x \neq -1$

Chương IV

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

A. ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN

I. Các định nghĩa cơ bản

Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên (a,b) . Hiệu số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số x tại điểm $x_0 \in (a,b)$. Hiệu số $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số tại điểm x_0 .

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ thì hàm f được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 và giới hạn đó được gọi là *đạo hàm tại điểm* x_0 của f .

Ký hiệu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Các giới hạn: $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế tương ứng được gọi là *đạo hàm bên phải* và *đạo hàm bên trái* của hàm số f tại điểm x_0 .

Định lý: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 khi và chỉ khi f có đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải tại điểm x_0 và

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Đạo hàm trong khoảng (a,b) : Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên (a,b) nếu f có đạo hàm tại mọi điểm trong (a,b) .

Đạo hàm trên đoạn $[a,b]$: Hàm f được gọi là có đạo hàm trên $[a,b]$ nếu f có đạo hàm trên (c,d) và $[a,b] \subset (c,d)$

II. Các công thức tính đạo hàm của các hàm cơ bản

$$1. (x^m)' = mx^{m-1}$$

$$2. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8. (\sin x)' = \cos x$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\cot gx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 14. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

III. Các quy tắc lấy đạo hàm cơ bản

Giả sử α là hằng số, $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm có đạo hàm.

Khi đó:

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2. (\alpha u)' = \alpha u', \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3. (u.v)' = u'v + v'u$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$5. \left(\frac{\alpha}{v}\right)' = -\frac{\alpha v'}{v^2}$$

6. Nếu $y = f(u)$, $u = u(x)$ trong đó các hàm f và $u(x)$ có đạo hàm thì $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

7. Hàm f đơn điệu nghiêm cách và liên tục trên $I = (a, b)$, có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $f'(x) \neq 0$, khi đó hàm ngược của f là hàm $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

IV. Mối liên hệ giữa đạo hàm và liên tục

Nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì f liên tục tại x_0 (đảo lại không đúng).

V. Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

□ BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Hãy tính $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ bằng định nghĩa.

Giải:

Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{x-1} = -8$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(x-2)(x-3)^3 = 0$$

Tương tự ta có: $f'(3) = 0$

Bài 2: Khảo sát sự có đạo hàm của hàm sau tại $x_0 = 1$

a. $f(x) = (x-1)\sqrt{(x-1)^2}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Giải:

$$\text{a. Ta có: } f(x) = (x-1)|x-1| = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^2}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

$$\text{Vậy: } f(1^+) = f(1^-) = 0$$

Do đó f có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $f'(1) = 0$.

$$\text{b. Xét } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{(x-1)^2}$$

Đặt $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1$, khi $x \rightarrow 1$ thì $u \rightarrow 0$.

Vậy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{(x-1)^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi(u+1)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi(u+1)}{u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \cdot \pi^2 \right] = \pi^2 \end{aligned}$$

Do đó f có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $f'(1) = 2$.

Bài 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Khảo sát sự liên tục và có đạo hàm của f tại $x_0 = 0$.

Giải:

Ta có: $f(0) = 1$

Theo đề bài thì $f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x-1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 = f(0)$

$\Rightarrow f$ liên tục phải tại $x_0 = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \neq f(0)$

$\Rightarrow f$ không liên tục bên trái tại $x_0 = 0$.

Vậy, f không liên tục tại $x_0 = 0 \Rightarrow f$ không có đạo hàm tại.

Bài 4: Giả sử $y = \varphi(x)$ là hàm liên tục tại a và $\varphi(a) \neq 0$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x-a| \cdot \varphi(x)$ không có đạo hàm tại a .

Giải:

Theo giả thiết ta có hàm f xác định tại a và trên lân cận của a ,
 $f(0)=0$, $\varphi(a) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Xét } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|a + \Delta x - a| \cdot \varphi(a + \Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Do đó ta có :

$$\begin{aligned}\bullet f'(a^+) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a) \\ \bullet f'(a^-) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \varphi(a + \Delta x) = -\varphi(a)\end{aligned}$$

Vì $\varphi(a) \neq -\varphi(a) \Rightarrow f'(a^+) \neq f'(a^-)$.

Vậy, hàm f không có đạo hàm tại a .

$$\text{Bài 5: Tìm } n \in \mathbb{N} \text{ để } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- Liên tục tại.
- Có đạo hàm hữu hạn tại.
- Có đạo hàm liên tục tại.

Giải:

a. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^n \sin \frac{1}{x} \right]$ tồn tại và bằng 0 khi $n > 0$. Do đó hàm liên tục tại $x_0 = 0$ khi $n > 0$.

b. Hàm f có đạo hàm hữu hạn tại $x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ tồn tại hữu hạn}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x}}{x} \exists \text{ hữu hạn}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} \exists \text{ hữu hạn}$$

$$\text{mà } \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-1} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } n-1 < 0 \\ 0 & \text{khi } n-1 > 0 \end{cases}$$

Vậy để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^{n-1} \sin \frac{1}{x} \right]$, điều kiện là $n-1 > 0 \Leftrightarrow n > 1$

Suy ra với $n > 1$ thì hàm f có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và $f'(0) = 0$.

c. Hàm f có đạo hàm liên tục tại $x_0 = 0$ thì trước hết hàm f phải có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Do điều kiện của 2. Ta có $n > 1$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^n \sin \frac{1}{x} \right)' = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} \cdot x^n \\ &= nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (\forall x \neq 0) \end{aligned}$$

Vậy:

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f'(x) \text{ liên tục } x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow n - 2 > 0 \Leftrightarrow n > 2$$

Vậy, để hàm f có đạo hàm liên tục tại $x_0 = 0$ ta phải có $n > 2$.

Bài 6: Tính đạo hàm của các hàm sau đây

a. $y = (\sin x)^x$

b. $y = x^{x^x}$

c. $y = (\ln x)^{2x^2+1}$

Giải:

a. $y = (\sin x)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \sin x$, điều kiện $\sin x > 0$.

Khi đó: $(\ln y)' = [x \ln \sin x]'$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} (\sin x)'$$

$$= \ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \ln(\sin x) + x \cdot \cot x$$

$$\Rightarrow y' = y \left[\ln(\sin x) + x \cdot \cot gx \right] = (\sin x)^x \left[\ln(\sin x) + x \cdot \cot gx \right]$$

b. Ta có: $\ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x$, điều kiện $x > 0$.

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (x^x \ln x)' = (x^x)' \ln x + x^x \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y_1 = x^x \Rightarrow \ln y_1 = x \ln x \Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow y_1' = y_1 (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$\frac{y'}{y} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \frac{1}{x} = x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow y' = y x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

c. $\ln y = (2x^2 + 1) \ln(\ln x) \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = 4x \cdot \ln(\ln x) + (2x^2 + 1) \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = y \left[4x \cdot \ln(\ln x) + (2x^2 + 1) \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$= (\ln x)^{2x^2+1} \left[4x \cdot \ln(\ln x) + \frac{2x^2+1}{x \ln x} \right], \text{ điều kiện } x > 1.$$

Bài 7: Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a. $y = \left| (x-1)^2 (x+1)^3 \right|$

b. $y = \left| \sin^3 x \right|$

c. $y = \begin{cases} 1-x & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{khi } 2 < x < +\infty \end{cases}$

d. $y = \begin{cases} (x-a)^2 (x-b)^2 & \text{khi } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{khi } x \notin [a, b] \end{cases}$

Giải:

a. Viết các hàm dưới dạng $y = (x-1)^2 (x+1)^3 \operatorname{sgn}(x+1)$ với

$$\operatorname{sgn}(x+1) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x+1 > 0 \\ 0 & \text{khi } x+1 = 0 \\ -1 & \text{khi } x+1 < 0 \end{cases}$$

Các hàm $(x-1)^2$, $(x+1)^3$ có đạo hàm, $\forall x$. Hàm $\operatorname{sgn}(x+1)$

có đạo hàm bằng với $\forall x \neq -1$. Vậy theo quy tắc tính đạo hàm ta có: $y' = (x^2 - 1)|x+1|(x-1)$, $\forall x \neq -1$

$$f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\left| (x-1)^2 (x+1)^3 \right|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1)^2 (x+1)^3 = 0$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|(x-1)^2(x+1)^3|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)^2(x+1)^3 = 0$$

Vậy $f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow$ hàm f có đạo hàm tại $x = -1$

$$\Rightarrow y' = (x^2 - 1)|x + 1|(x - 1), \forall x$$

b. Tương tự ta có: $y' = \frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x|$

c. Các hàm $1-x$, $(1-x)(2-x)$, $2-x$ có các đạo hàm trong miền tương ứng, do đó:

$$y' = \begin{cases} -1 & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ 2x - 3 & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Xét đạo hàm bên trái, phải tại các điểm: $x = 1$; $x = 2$.

Theo định nghĩa ta có:

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(2-x) - 0}{x - 1} = -1$$

vậy: $f'(1^-) = f'(1^+)$ do đó hàm f có đạo hàm tại $x = 1$, $f'(1) = -1$

Tương tự:

$$f'(2^-) = 1, f'(2^+) = 1$$

$\Rightarrow$ hàm f có đạo hàm tại $x = 2$ và $f'(2) = 1$

Vậy:

$$y' = \begin{cases} -1 & \text{khi } -\infty < x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

d. Tương tự ta có:

$$y' = \begin{cases} 2(x-a)(2x-b)(2x-b-a) & \text{khi } a < x < b \\ 0 & \text{khi } x \notin [a, b] \end{cases}$$

tại các điểm $x = a$, $x = b$ ta dùng đạo hàm trái, đạo hàm phải:

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-a)^2(x-b)^2 - 0}{x - a} = 0$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)^2(x-b)^2 - 0}{x - a} = 0$$

Vậy $f'(a^-) = f'(a^+) = 0 \Rightarrow f$ có đạo hàm tại $x = a$.

Tương tự:

$$f'(b^-) = f'(b^+)$$

$\Rightarrow f$ có đạo hàm tại $x = b$.

Vậy:

$$y' = \begin{cases} 2(x-a)(2x-b)(2x-b-a) & \text{khi } a < x < b \\ 0 & \text{khi } x \notin (a, b) \end{cases}$$

B. VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

I. Định nghĩa

Hàm $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là khả vi tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu số gia $\Delta f(x_0)$ của nó tương ứng với số gia của đối số x , có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

trong đó A là một số không phụ thuộc Δx , còn α là một hàm của đối số Δx và là vô cùng bé khi $\Delta x \rightarrow 0$.

Mệnh đề: Hàm $y = f(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì điều kiện cần và đủ là hàm f có đạo hàm hữu hạn tại điểm đó.

Phần tuyến tính đối với Δx của số gia $\Delta f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a, b)$ được gọi là vi phân của hàm số đã cho tại điểm đó và được ký hiệu là

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

- Nếu x là biến số độc lập thì $\Delta x = dx$. Trong trường hợp này ta có: $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$

- Nếu $x = \varphi(t)$ là một hàm khả vi theo t thì $dx = \varphi'(t)dt$. Do đó: $df(x_0) = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt = f'(x_0) \cdot dx$

II. Các tính chất cơ bản của vi phân

1. $dC = 0$ (C: hằng số)

2. $d(C \cdot u) = C \cdot du$

3. $d(u \pm v) = du \pm dv$

$$4. d(u.v) = u dv + v du$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$6. df(u) = f'(u) du$$

Nếu số gia của đối số Δx có trị tuyệt đối bé, thì

$$\Delta y \approx dx \quad \text{và} \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Như vậy, vi phân của hàm có thể sử dụng để tính gần đúng.

□ BÀI TẬP

Bài 1: Tính vi phân của các hàm số sau đây

a. $y(x) = \arctan x$

b. $y(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$

c. $s(t) = e^{t^3}$

Giải:

a. Ta có: $dy = (\arctan x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}$

b. $dy = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|} \operatorname{sgn} \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$

c. $ds = \left(e^{t^3} \right)' dt = e^{t^3} \cdot 3t^2 dt$

Bài 2: Hãy tính

a. $\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$

b. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Giải:

a. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) &= \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} \\ &= \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8)dx}{3x^2dx} \\ &= 1 - 4x^3 - 3x^6\end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} \\ &= \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}dx}{2xdx} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}\end{aligned}$$

Bài 2: Dùng vi phân để tính gần đúng

a. $\sqrt[3]{1,02}$

b. $\sin 29^\circ$

Giải:

a. Xét hàm $y = \sqrt[3]{x}$, có: $y'(1) = \frac{1}{3}$

Theo công thức số gia: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, nếu Δx khá bé.

Do đó: $\sqrt[3]{1,02} = \sqrt[3]{1 + \Delta x} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\Delta x = 1,0066\dots$ ($\Delta x = 0,02$)

b. Xét hàm $y = \sin x$, đạo hàm của y tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi

đó theo công thức số gia bé ta nhận được: $\left(\Delta x = -\frac{\pi}{180}\right)$

$$\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{180}\right); 0,484$$

C. ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN CẤP CAO CỦA HÀM MỘT BIẾN

I. Định nghĩa

Đạo hàm cấp hai của hàm $y = f(x)$ là đạo hàm của đạo hàm cấp một. Đạo hàm cấp hai của hàm f được ký hiệu là

$$y'' \text{ hay } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ hay } f''(x)$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

Tổng quát, đạo hàm cấp n của hàm f là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \text{ hay } \frac{d^n y}{dx^n} \text{ hay } f^{(n)}(x)$$

Vi phân cấp hai của $y = f(x)$ là vi phân của vi phân cấp một của $y = f(x)$:

$$d^2 y = d(dy)$$

Tổng quát, vi phân cấp n của $y = f(x)$ là:

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

Nếu x là biến độc lập thì $d^2 x = d^3 x = \dots = 0$. Do đó ta có:

$$d^n f = f^{(n)}(dx)^n = f^{(n)} dx^n$$

II. Một số công thức cơ bản

$$1. (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n x \quad (a > 0)$$

$$2. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$3. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$4. (x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$5. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

6. Công thức Leibnitz: Nếu $u(x)$, $v(x)$ là các hàm khả vi n lần theo biến x thì ta có

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

□ BÀI TẬP

Bài 1:

a. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 6$, tìm y' , y'' , y''' , ...

b. $y = x\sqrt{1+x^2}$. Tìm y'' .

c. $y = x^2 e^x$. Tìm $y^{(20)}(0)$.

Giải:

a. $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$

Do đó: $y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$

$$y''' = 60x^2 + 48x - 18$$

$$y^{(4)} = 120x + 48$$

$$y^{(5)} = 120;$$

...

$$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6$$

$$b. y' = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{4x \cdot \sqrt{1+x^2} - (1+2x^2) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2x^3+3x}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$c. y = x^2 e^x. \text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow u' = 2x, u' = 2, u^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 3$$

$$v = e^x \Rightarrow v' = e^x, v^{(n)} = e^x$$

$$\text{Ta có: } y^{(20)}(0) = \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i \cdot u^{(20-i)}(0) \cdot v^{(i)}(0) = C_{20}^{18} \cdot 2 \cdot 1 = 380$$

Bài 2:

$$a. y = (2x-3)^3. \text{ Tìm } dy, d^2y, d^3y.$$

$$b. y = \sqrt{1+x^2}. \text{ Tìm } d^2y.$$

$$c. y = u^2. \text{ Tìm } d^{10}y, \text{ nếu } u \text{ là hàm của } x \text{ khả vi đến 10 lần.}$$

$$d. y = x \cos 2x. \text{ Tìm } d^{10}y.$$

Giải:

$$a. dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2 dx$$

$$\Rightarrow d^2y = 12(2x-3) \cdot 2 \cdot dx^2 = 24(2x-3)dx^2 = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3.$$

$$b. dy = d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow d^2y = d(dy) = \frac{\sqrt{1+x^2}(dx)^2 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}(dx^2)}{(1+x^2)}$$

$$\text{Vậy: } d^2y = \frac{(dx)^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

c. Áp dụng công thức Leibnitz đối với tích $y = u.v$, ta có:

$$d^{10}y = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \cdot d^i u \cdot d^{10-i} v = 2 \sum_{i=0}^4 C_{10}^i \cdot d^i u \cdot d^{10-i} v + C_{10}^5 \cdot (d^5 u)^2$$

$$= 2u \cdot d^{10}v + 20du \cdot d^9v + 90d^2u \cdot d^8v + 240d^3u \cdot d^7v + 120d^4u \cdot d^6v + 252(d^5u)^2$$

d. Theo công thức Leibnitz, ta có:

$$\begin{aligned} d^{10}y &= (-x \cdot 2^{10} \cos 2x - C_{10}^1 \cdot 2^9 \cdot \sin 2x)(dx)^{10} \\ &= -20^{10} (x \cos 2x + 5 \sin 2x)(dx)^{10} \end{aligned}$$

D. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

I. Công thức khai triển Taylor:

Giả sử hàm f xác định trong $[a, b]$ có đạo hàm hữu hạn đến cấp $(n+1)$ trong (a, b) và giả sử $x_0 \in (a, b)$. Khi đó ta có công thức khai triển Taylor của f tại điểm x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

trong đó c nằm giữa x và x_0 và

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

được gọi là phần dư bậc n của f .

• Công thức Mac–Laurin:

Trong công thức (1) cho $x_0 = 0$, ta được

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Khai triển Mac–Laurin của một số hàm thường dùng:

i. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n$ với $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$

ii. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k-1}$

với $R_{2k-1} = \frac{\sin(\theta x + k\pi)}{(2k)!}x^{2k}$

iii. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}$

$$\text{với } R_{2k} = \frac{\cos\left[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\text{iv. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$\text{với } R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{v. } (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

$$\text{với } R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$$

(trong tất cả các công thức trên ta có $0 < \theta < 1$)

II. Tính giới hạn dạng vô định theo quy tắc L'Hospital

♦ Quy tắc L'Hospital:

Giả sử các hàm f và g khả vi trong lân cận nào đó của điểm x_0 và có thể trừ x_0 .

$$\text{Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ hay } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$$

tức là tại điểm $x = x_0$ thương số có dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

với điều kiện tồn tại giới hạn của tỷ số các đạo hàm.

- Nếu thương $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tại điểm $x = x_0$ cũng có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ và các đạo hàm $f'(x)$, $g'(x)$ thoả mãn các điều kiện tương ứng, thì lại tìm các giới hạn của các đạo hàm bậc 2,...
- Trường hợp có dạng vô định 0^0 hoặc 1^∞ thì cần lấy Logarit hàm đã cho và tìm giới hạn của Logarit của nó.

III. Cực trị địa phương - Cực trị toàn cục

1. Cực trị địa phương:

Cho hàm f xác định trên $[a, b]$.

- Hàm f đạt cực đại (địa phương) tại $x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow$ tồn tại lân cận V của x_0 và $V \subset [a, b]$ sao cho

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

- Hàm f đạt cực tiểu (địa phương) tại $x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow$ tồn tại lân cận V của x_0 và $V \subset [a, b]$ sao cho

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

2. Cực trị toàn cục:

Cho hàm f xác định trên $[a, b]$.

➤ Hàm f đạt cực đại toàn cục (giá trị nhỏ nhất) tại $x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$

➤ Hàm f đạt cực tiểu toàn cục (giá trị lớn nhất) tại $x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$

• **Định lý:** Nếu hàm f đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì

$$f'(x_0) = 0.$$

• **Định lý:** Cho hàm f có đạo hàm trên $[a, b]$ và x_0 (có thể hàm f không có đạo hàm tại $x_0 \in [a, b]$).

➤ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì hàm f đạt cực tiểu (địa phương) tại x_0 .

➤ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì hàm f đạt cực đại (địa phương) tại x_0 .

□ BÀI TẬP

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm trên D .

a. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3$ trên $[-1, 4]$.

b. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ trên $[-1, 1]$.

c. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ trên $[0, \pi]$

Giải: Miền xác định của hàm là $[-1, 4]$

$$a. y' = 4x^3 - 12x^2, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 3$$

Xét giá trị của hàm $f(x)$ tại $-1, 0, 3, 4$

$$f(-1) = 1 + 4 + 3 = 8; f(0) = 3,$$

$$f(3) = 34 - 4 \cdot 33 + 3 = -24; f(4) = 3$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1,4]} f = \max\{8, 3, -24, 3\} = 8$$

$$\min_{[-1,4]} f = \min\{8, 3, -24, 3\} = -24$$

b. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ trên đoạn $[-1, 1]$

$$y' = 2x \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3} \sqrt[3]{x-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} (4x^2 - 3x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \frac{3}{4}$$

Tính giá trị của hàm tại $-1, 0, \frac{3}{4}, 1$

$$\text{Ta có: } f(-1) = \sqrt[3]{4}, f(0) = 0; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32\sqrt{2}}; f(1) = 0$$

$$\text{Vậy: } \max_{[-1,1]} f = \max\left\{\sqrt[3]{4}, 0, \frac{9}{32\sqrt{2}}, 0\right\} = \sqrt[3]{4}$$

$$\min_{[-1,1]} f = \min\left\{\sqrt[3]{4}, 0, \frac{9}{32\sqrt{2}}, 0\right\} = 0$$

c. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ trên đoạn $[0, \pi]$

$$f'(x) = -\sin x - \sin 2x$$

Ta có : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Trên đoạn $[0, \pi]$, chỉ xét $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Khi đó : $f(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$

Vậy: $\max_{[0, \pi]} f(x) = \max \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{2}$

$$\min_{[0, \pi]} f(x) = \min \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right\} = -\frac{3}{4}$$

Bài 2: Khai triển Taylor đến bậc 5 của hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x=1$

Giải:

Tính giá trị của hàm $f(x) = x^{1/3}$ và đạo hàm của nó đến bậc 5 khi $x=1$:

$$f(1)=1; f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}; f'(1)=\frac{1}{3}; f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};$$

$$f''(1)=-\frac{2}{9}; f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}; f'''(1)=\frac{10}{27};$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}; f^{(4)}(1)=-\frac{80}{81}; f^{(5)}(x)=\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}};$$

$$f^{(5)}(1)=\frac{880}{243}$$

Do đó theo công thức Taylor, ta có:

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9.2!}(x-1)^2+\frac{10}{27.3!}(x-1)^3-\frac{80}{81.4!}(x-1)^4+\frac{880}{243.5!}(x-1)^5+R_5$$

trong đó

$$R_5=\frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-1)^6$$

với $1 < c < x$ hay $x < c < 1$

Bài 3: Biểu diễn $f(x)=a^x$ ($a > 0$) dưới dạng đa thức bậc 3 đối với x .

Giải:

Ta có

$$f(x)=a^x \quad \Rightarrow \quad f(0)=1$$

$$f'(x)=a^x \ln a \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\ln a$$

$$f''(x)=a^x (\ln a)^2 \quad \Rightarrow \quad f''(0)=(\ln a)^2$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

$$f'''(x) = a^x (\ln a)^3 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = (\ln a)^3$$

$$f^{(4)}(x) = a^x (\ln a)^4 \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = (\ln a)^4$$

Vậy, theo công thức Mac–Laurin ta được

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + R_3$$

$$\text{với } R_3 = \frac{x^4 \ln^4 a}{4!} a^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

Bài 4: Tính $\sqrt{e}$ chính xác đến 0,0001

Giải:

Ta có

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$$\text{với } R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{2}, \text{ ta có: } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + R_n$$

$$\text{với } R_n = \frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1} (n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\text{Vì } 0 < \theta < 1 \text{ và } 2 < e < 3 \text{ nên } R_n < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1} (n+1)!}$$

nhưng $e^{1/2} < 2$, vì thế $R_n < \frac{1}{2^n(n+1)!}$ cần xác định n để có bất đẳng thức: $R_n < 0,0001$.

$$\text{nếu } n = 3 \text{ thì } R_3 < \frac{1}{8.24} = \frac{1}{192}$$

$$\text{nếu } n = 4 \text{ thì } R_4 < \frac{1}{16.120} = \frac{1}{1920}$$

$$\text{nếu } n = 5 \text{ thì } R_5 < \frac{1}{37.720} \Rightarrow R_5 < 0,0001$$

Để xác định $\sqrt{e}$ với độ chính xác 0,0001 ta dùng đẳng thức gần đúng:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} + \frac{1}{2^5 5!} \approx 1.64869 \approx 1.6487$$

Bài 5: Tính các giới hạn sau đây

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

Giải: Đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$, nên ta có

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Bài 6: Tính các giới hạn sau đây

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{x/2}}{x + e^x}$

Giải: Ta có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, vậy

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{x/2}}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{x/2} \left(2 + \frac{x}{2}\right)}{e^x}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} e^{x/2}} = 0 \\ -\infty \end{array} \right]$$

Bài 7: Tìm giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(e^x - 1)} \right]$

Giải:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x)$ $(0 \cdot \infty)$ ta biểu diễn tích các hàm dưới dạng thương để đưa về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ và sử dụng các quy tắc L'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} x^2 \right) = 0$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(e^x - 1)} \right]$ $(\infty - \infty)$ ta quy đồng mẫu số để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ và sử dụng quy tắc L'Hospital :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(e^x - 1)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 8: Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$

Giải:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \left(0^0\right)$

Đặt $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

Dùng quy tắc L'Hospital, ta được:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x \left(0^0\right)$

Đặt $y = (\sin x)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Vậy:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0. \text{ Vậy: } \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1\end{aligned}$$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} \quad (1^\infty)$

Đặt $y = (1+x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(1+x)$

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x \ln^2 x}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0\end{aligned}$$

Vậy: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$

Bài 9 : Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

- Tìm m để f liên tục tại $x = 0$
- Với m vừa tìm được hãy tính $f'(0)$.

Giải:

a. Hàm f liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = m$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Suy ra $m = 1$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = e^x$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

2. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a. $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

b. $y = \frac{e^x 2^{5x}}{3^{4x}}$

c. $y = 2^{\cos x}$

d. $y = x^{2x}$

e. $y = x^{\ln x}$

f. $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

g. $y = \log_2(3x+2)$

3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$

4. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 1 - e^{3x}}{\sin x - x - 3x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

g. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\cot g \pi x}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot g \pi x)$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot g x$

j. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

$$\text{k. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x \right)$$

$$\text{l. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$$

$$\text{m. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$$

$$\text{n. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(2x)$$

$$\text{o. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/\sin^2 x}$$

5. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên miền xác định

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} & \text{khi } x \neq \pi \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = \pi \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x)}{-1 + e^{3x}} & \text{khi } x > 0 \\ \frac{2}{3} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1} - x - 2}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

a. Xác định m để f liên tục tại $x = -1$.

b. Tìm $f'(-1)$ ứng với m vừa tìm được trong câu a.

7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a. Xác định m để f liên tục tại $x_0 = 0$.

b. Tìm $f'(0)$ ứng với m vừa tìm được trong câu a.

8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+a)e^{-bx} & \text{khi } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm a và b

để có f đạo hàm tại $x_0 = 0$.

9. Chứng minh rằng hàm số

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ có đạo hàm gián đoạn.

10. Có thể khẳng định được hay không, rằng $F(x) = g(x) + f(x)$ không có đạo hàm tại điểm x_0 nếu:

a. Hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 , còn hàm g không có đạo hàm tại điểm đó.

b. Cả hai hàm đều không có đạo hàm tại điểm x_0 .

11. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số

a. $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$

b. $y = e^{x^2}$

c. $y = \sin(5x + 2)$

12. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$

b. $y = 5 - 3\cos^2 x$

c. $y = 2^x + 2^{-x}$

d. $y = \sin 2x$.

13. Cho $y = \frac{e^x}{x}$. Tìm $y^{(10)}$

14. Cho $f(x) = x \sin x$. Tính $f^{(20)}(0)$.

15. Tìm dy, d^2y, d^3y biết

a. $y = e^{\sin x}$

b. $y = \ln(\cos x)$

c. $y = \ln \frac{x-6}{x+6}$

d. $y = x(\ln x - 1)$

16. Sử dụng công thức vi phân, tính gần đúng

a. $\arctg 1,05$

b. $\ln(1,03)$

17. Cho $\alpha(x)$ là một vô cùng bé cấp cao hơn x^2 khi $x \rightarrow 0$. Tính

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2) + \alpha(x)}{x^2}$$

18. Khai triển Mac–Laurin của các hàm sau đây

a. $y = f(x) = \frac{1}{1-x}$

b. $y = f(x) = \cos x$

c. $y = f(x) = x + \sqrt{x+1}$

d. $y = f(x) = \ln(1-x)$

19. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

a. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ trên $[-1, 4]$

b. $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}$ trên $[2, 4]$

20. Cho hàm số $f(x) = x \sin(2x)$. Trong khai triển Mac–Laurin đến cấp 4 của $f(x)$, hãy tìm hệ số của x^4 .

21. Cho hàm số $f(x) = x \cdot \cos 2x$. Trong khai triển Mac–Laurin đến cấp 3 của hàm số $f(x)$, hãy tìm hệ số của x^3 .

22. Trong khai triển Mac–Laurin đến cấp 3 của hàm số $f(x) = x \ln(1+2x)$, tìm hệ số của x^3 .

23. Cho $f(x) = 3x\sqrt{x^2}$. Chứng minh rằng f khả vi tại $x = 0$.

24. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} x^7 \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

a. Hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$;

b. Hàm f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$;

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x^{14}}} = 0$

25. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{mx} - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m^2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm f

liên tục tại $x = 0$

26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Hàm f có liên

tục và có đạo hàm tại $x = 0$ hay không?

27. Cho hàm $y(x)$ thỏa $e^{y(x)} + x \cdot y(x) = e$. Tìm $y'(0)$.

28. Cho hàm số $Q = 30 - 4P - P^2$. Tính $\varepsilon = P \cdot \frac{d(\ln Q)}{dP}$ khi $Q = 9$

29. Cho hàm f, g là các hàm khả vi theo x thỏa $f(0) = 1$ và $g(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $h(x) = f(x)g(x)$ và $h'(x) = f(x) \cdot g'(x)$.

Chứng minh rằng: $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

30. Cho $y(x)$ thỏa mãn $\ln[y(x)] + \frac{x}{y(x)} = 1$. Tìm $y'(x)$.

31. Cho hàm f thỏa mãn $f(6) = 1$, $f'(6) = -2$ và hàm g thỏa mãn $g(x) = \frac{d}{dx}[x^2 f(3x)]$. Tính $g(2)$.

32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{mx} & \text{khi } x > 0 \\ x + m & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm f khả vi tại $x = 0$.

33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln(2x + e)}{x} & \text{khi } -\frac{1}{2} < x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Hàm f có khả vi tại $x = 0$ hay không?

34. Cho hàm số $f(x) = \ln(1 - 2x)$. Tính $f''(x)$

35. Cho hàm số $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Tính $d^2 f(x)$

36. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2mx)}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2\sin(mx) & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Giả sử hàm f khả vi tại 0. Khi đó, hãy tính $f(m\pi)$.

37. Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$; thỏa $f(0) = 0$ và $f'(x) > 0$, $\forall x$. Đặt $g(x) = f(x^2)$, chứng minh rằng:

a. Hàm $g(x)$ là đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

b. Hàm $g(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$.

c. $g(x) \geq 0, \forall x$

38. Giả sử hàm số $\varphi(x)$ có đạo hàm và tăng nghiêm ngặt trên I . Đặt $f(x) = \varphi(x^3 - 12x)$ với $x \in I$. Chọn phát biểu đúng

a. f đạt cực đại địa phương tại -2 , đạt cực tiểu địa phương tại 2

b. f đạt cực tiểu địa phương tại -2 , đạt cực đại địa phương tại 2

c. f không đạt cực trị tại -2 và không đạt cực trị tại 2

d. Các câu kia đều sai

39. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên một lân cận của 0 và

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, chứng minh rằng:

a. $L = 0$

b. $f'(0) = 0$

c. $f(0) = 0$

40. Cho hàm $f(x) = x \ln x - x$, chứng minh rằng f đạt cực tiểu toàn cục.

41. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+2x^7} - 1}{\ln(1+3x^7)} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm m để f

liên tục tại $x = 0$.

42. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục tại 0 và thỏa mãn

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1$$

Khi đó, đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2) + f(3x)}{1 - \cos x}$ thì

- a. $L = 0$
- b. $L = 3$
- c. $L = 4$
- d. $L = 9$

Chương V

TÍCH PHÂN

♦ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

+ Hàm F được gọi là *nguyên hàm* của hàm f trên khoảng mở X , nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$

+ Tập hợp mọi nguyên hàm của f trên khoảng mở X được gọi là *tích phân bất định* của hàm f (trên khoảng này). Ký hiệu:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ là hằng số tùy ý})$$

trong đó $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$

2. Các tính chất cơ bản của tích phân không xác định

1. $\int dF(x) = F(x) + C$

2. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$ với a là hằng số.

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = u(x)$ khả vi liên tục

thì $\int f(u)du = F(u) + C$

3. Bảng tích phân bất định của một số hàm thường gặp

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ khi } m \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7. \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a > 0)$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$16. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$17. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

4. Phương pháp đổi biến số trong tích phân bất định

Khi gặp bài toán tích phân mà hàm số dưới dấu tích phân so với dạng cơ bản chỉ thấy khác nhau ở chỗ: biến số có nhân thêm hệ số hoặc sai khác hằng số, ta dùng phương pháp đổi biến số sau đây:

- Nếu $x = \varphi(t)$ trong đó hàm $\varphi(t)$ là hàm đơn điệu, khả vi liên tục theo biến t . Khi đó công thức đổi biến là:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

- Nếu $u = \psi(x)$ khả vi liên tục thì:

$$\int f[\psi(x)] \psi'(x) dx = \int f(u) du$$

5. Phương pháp tích phân từng phần trong tích phân bất định

Áp dụng công thức

$$\int u dv = uv - \int v du$$

với $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm khả vi liên tục theo x .

Chú ý:

+ Nhờ công thức tính tích phân từng phần, việc lấy tích phân $\int u dv$ được đưa về tích phân khác $\int v du$, do đó tích phân sau phải đơn giản hơn tích phân ban đầu hoặc chúng cùng dạng với nhau. Vì vậy cần phải chọn hàm u sao cho đạo hàm của nó đơn giản hơn, còn dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân mà tích phân của phần này hoặc là đã biết hoặc có thể tìm được.

+ Đối với các tích phân dạng

$$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx, \int P(x)\cos axdx,$$

trong đó $P(x)$ là đa thức của x , thì nên chọn $u = P(x)$, còn dv tương ứng là các biểu thức $e^{ax}dx, \sin axdx, \cos axdx$.

+ Đối với tích phân dạng:

$$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \\ \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\arctgxdx$$

nên chọn các hàm $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ làm u , còn dv là biểu thức $P(x)dx$.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Tính các tích phân bất định sau đây

a. $A_1 = \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)dx$

b. $A_2 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

c. $A_3 = \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$

d. $A_4 = \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$

Giải:

a. Khai triển $(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = x\sqrt{x} + 1 = x^{\frac{3}{2}} + 1$

Do đó:

$$A_1 = \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 1)dx$$

b. Ta có $A_2 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + 2 \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}} \right) dx$

$$\text{Nên } A_2 = \int (x + 2x^{1/6} + x^{-2/3}) dx$$

nghĩa là

$$A_2 = \int x dx + 2 \int x^{1/6} dx + \int x^{-2/3} dx$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{7/6}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + C$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x^{7/6} + 3x^{1/3} + C$$

c. Ta có $A_3 = \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = \int \left(x^{-5/2} - e^x + \frac{1}{x} \right) dx$

$$\Rightarrow A_3 = \int x^{-5/2} dx - \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow A_3 = -\frac{2}{3}x^{-3/2} - e^x + \ln|x| + C$$

d. Vì $\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$

Do đó

$$A_4 = \int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \left[x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right] dx$$

$$\Rightarrow A_4 = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C$$

Bài 2: Tính các tích phân bất định sau đây

a. $A_1 = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

b. $A_2 = \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$ với $a > 0$

c. $A_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

d. $A_4 = \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$

e. $A_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$

f. $A_6 = \int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$

Giải:

a. Đặt $t = \sqrt[3]{x}$, ta có $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$

Từ đó ta có:

$$A_1 = \int \frac{3t^2 \sin t}{t^2} dt = 3 \int \sin t dt = -3 \cos t + C$$

Vậy $A_1 = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C$

b. Đặt $x = 2a \sin^2 t$ thì $dx = 4a \cos t \sin t dt$. Ta nhận được:

$$A_2 = 8a^2 \int \sin^4 t dt = 8a^2 \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt$$

nghĩa là

$$A_2 = 2a^2 \int (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt \\ &= a^2 \left(3t - 2 \sin 2t + \frac{\sin 4t}{4}\right) + C \\ &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C \end{aligned}$$

c. Đặt $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$. Ta có:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int \frac{4t^3 dt}{t^2 - t} = 4 \frac{t^2}{t-1} dt = 4 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ \Rightarrow A_3 &= 4 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C \\ \Rightarrow A_3 &= 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right) + C \end{aligned}$$

e. Đặt $u = 2 \ln x + 3 \Rightarrow du = 2 \frac{1}{x} dx$. Ta có:

$$A_4 = \int t^3 \frac{du}{2} = \frac{u^4}{4} + C$$

$$\text{Do đó: } A_4 = \frac{(2 \ln x + 3)^4}{8} + C$$

e. Đặt $u = \sqrt{2x-9} \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{2x-9}}$ nghĩa là $dx = u du$. Mặt

khác ta cũng có $x = \frac{u^2 + 9}{2}$

$$\text{Vậy: } A_5 = \int \frac{u du}{\frac{u^2 + 9}{2} u} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 9}$$

$$\Rightarrow A_5 = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C$$

f. Ta biến đổi: $x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2 + 1)^2 + 4$.

$$\text{Đặt } u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Vậy: } A_6 = \int \frac{du}{2(u^2 + 4)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C$$

$$\Rightarrow A_6 = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2} + C$$

Bài 3: Tính các tích phân bất định sau đây

a. $A_1 = \int x \ln x dx$

b. $A_2 = \int \operatorname{arctg} x dx$

c. $A_3 = \int x^2 \arccos x dx$

d. $A_4 = \int \sin(\ln x) dx$ và $A_5 = \int \cos x (\ln x) dx$

Giải:

a. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = xdx \text{ chọn } v = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Vậy: } A_1 = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\text{b. Đặt } u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx \text{ chọn } v = x$$

$$\text{Vậy: } A_2 = x \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\text{Nên } A_2 = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\text{c. Đặt } u = \arccos x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dv = x^2 dx \text{ chọn } v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\text{Vậy: } A_3 = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} I_1 \quad (1)$$

$$\text{Ta tính } I_1 = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Ta có: $I_1 = \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ chọn } v = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Thì } I_1 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} + \int 2x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= x^2 \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} d(-x^2) \\ &= -x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta có:

$$A_3 = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

d. Đặt $u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$

$$dv = dx \text{ chọn } v = x$$

Vậy

$$A_4 = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - A_5$$

Ta tính $A_5 = \int \cos(\ln x) dx$,

Đặt $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$

$$dv = dx \text{ chọn } v = x$$

$$\text{Do đó: } A_5 = x \cdot \cos(\ln x) + A_4$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_4 = x \sin(\ln x) - A_5 \\ A_5 = x \cos(\ln x) + A_4 \end{cases}$$

Giải ra, ta được

$$A_4 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

$$A_5 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

I.1. 1. Tính các tích phân bất định sau đây

a. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$

b. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

c. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$

d. $\int x^2 - 2 - 3x^2 - 2 dx$

e. $\int \frac{dx}{x+1 \sqrt{x}}$

f. $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4 2x + 4}$

g. $\int \frac{dx}{2x + 3^2}$

h. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}$

2. Tính các tích phân bất định sau đây

a. $\int x^2 e^{-2x} dx$

b. $\int e^{2x} \cos x dx$

c. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$

d. $\int \frac{x^2 \arctg x}{x^2 + 1} dx$

◆ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$

+ Phân hoạch $[a, b]$ thành n phần tùy ý bằng các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Trên từng đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, ta chọn một điểm ξ_i tùy ý và tìm chiều dài của từng đoạn đó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = \overline{1, n}$)

+ Tổng tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ là tổng có dạng $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$

+ Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n \quad \left(\lambda = \max \{ \Delta x_i; i = \overline{1, n} \} \right)$$

và giới hạn đó không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn $[a, b]$ và cách chọn điểm ξ_i thì số I được gọi là *tích phân xác*

định của hàm f trên đoạn $[a, b]$ và ký hiệu là: $I = \int_a^b f(x)dx$.

Nếu f có tích phân xác định trên $[a, b]$ thì ta nói f **khả tích** trên $[a, b]$

+ Nếu $f(x) > 0$ trên $[a, b]$ thì tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = f(x); x = a; x = b; y = 0$$

2. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^b c.f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, \text{ trong đó } c \text{ là hằng số}$$

6. Nếu f và g là những hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ thỏa

$$\text{mãn } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Hệ quả

+ Nếu f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

+ Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Thì: } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4. Những quy tắc tính tích phân xác định

• Định lý (đạo hàm dưới dấu tích phân):

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì hàm số

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \text{ trên } [a, b]$$

Chú ý: Theo định lý trên thì hàm dưới dấu tích phân, phải là một hàm liên tục. Đặc biệt cần chú ý đến sự biểu diễn của hàm ϕ , cận dưới là hằng số, cận trên là biến số x

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \phi'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$$

$$+ \text{ Trường hợp } \phi(x) = \int_a^{\phi(x)} f(t) dt \text{ thì } \phi'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x)$$

• **Công thức Newton – Leibnitz:**

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có nguyên hàm $F(x)$ cũng liên tục trên đoạn $[a,b]$. Thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

• **Phương pháp đổi biến số:**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

trong đó $x = \varphi(t)$ là hàm khả vi trên đoạn $[\alpha, \beta]$ sao cho $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$

• **Phương pháp tích phân từng phần:**

$$\int_a^b u.dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

trong đó: $u = u(x)$, $v = v(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$.

Nếu hàm f là hàm lẻ trên $[-a, a]$ nghĩa là:

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in [-a, a] \quad \text{thì} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Nếu hàm $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-a, a]$, nghĩa là:

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in [-a, a] \quad \text{thì} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

• **Hàm khả tích:**

- Điều kiện cần: Hàm f khả tích trên $[a,b]$ thì bị chặn trên đoạn đó.

- Điều kiện đủ:

- + Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì f khả tích.
- + Nếu f bị chặn trên $[a,b]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì f sẽ khả tích

Chú ý:

- Có những hàm bị chặn nhưng không khả tích.
- Có những hàm khả tích nhưng chưa chắc liên tục.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Xét sự khả tích của hàm số định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \in (0,1] \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Giải:

Khi $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$, vậy hàm f không bị chặn trên $[0,1]$.
Do đó f không khả tích trên $[0,1]$

Bài 2: Xét sự khả tích của hàm sau đây trên $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \in (\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) \end{cases}$$

Giải:

Miền giá trị của f trên $[0,1]$ chỉ có hai giá trị 0 và 1 nên $f(x)$ bị chặn trên $[0,1]$.

- Ta chia $[0,1]$ bởi phép phân hoạch đều:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1.$$

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ nếu chọn ξ_i là số hữu tỉ thì tổng tích phân là $S_n = 1$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

- Ta chia $[0,1]$ bởi n điểm chia $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ nếu chọn ξ_i là số vô tỉ thì tổng tích phân là $S_n = 0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$. Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ không tồn tại. Vậy $f(x)$ không khả tích trên $[0,1]$

Bài 3: Xét sự khả tích của $f(x)$ trên $[0,1]$ với

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x = 1 \\ \frac{x \ln x}{1-x} & \text{nếu } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Giải:

Xét hàm $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x} \Rightarrow$ hàm f liên tục trong $(0,1)$. Mặt khác

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 = f(1)$$

nên hàm f liên tục trên $[0,1]$. Vậy hàm f khả tích trên $[0,1]$.

Bài 4: Tính đạo hàm

a. $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx$

b. $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx$

c. $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx$

Giải:

a. Vì $\int_a^b \sin x^2 dx$ là một hằng số, nên đạo hàm của nó bằng 0.

Vậy $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0$

b. Đạo hàm theo biến a, ta có: $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\sin a^2$

c. Tương tự $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2$

Bài 5: Tính đạo hàm

a. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

$$b. \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

Giải:

Áp dụng qui tắc vi phân của tích phân như một hàm hợp ta có:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = F[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$a. \frac{d}{dx} \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dx = 2x\sqrt{1+x^4}$$

$$b. \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{18}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

Bài 6: Tìm giới hạn

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

Giải: Áp dụng quy tắc L'Hospital.

$$\begin{aligned} \text{a. Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \cos t^2 dt \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. Ta có: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{2t^2} dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{d}{dx} e^{x^2}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{2x \cdot e^{x^2}} \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x}$$

$$= 0$$

Bài 7: Tính các tích phân xác định sau đây

a. $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

b. $I_2 = \int_0^2 |1-x| dx$

Giải: Áp dụng công thức Newton – Leibnitz

a. Ta có: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. Chia tích phân của hàm đã cho trên $[0,2]$ thành tổng của các tích phân trên đoạn $[0,1]$ và $[1,2]$ trên mỗi đoạn ấy hàm dưới dấu tích phân có dấu không đổi .

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-x| dx &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= -\frac{(1-x)^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 8: Tính các tích phân xác định sau đây

a. $I_1 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

b. $I_2 = \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

c. $I_3 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ với $r > 0$

d. $I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x dx$

Giải: Sử dụng phương pháp đổi biến số.

a. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Nếu $x = 1$ thì $t = 0$, $x = e$ thì $t = 1$.

Khi đó ta có:

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

b. Đặt $\frac{1}{1+x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

Và $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Vậy: } I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{d(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right| \Bigg|_{\frac{4}{7}}^1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}
 \end{aligned}$$

c. Đặt $x = r \cdot \sin t \Rightarrow dx = r \cos t dt$

Nếu $x = 0$ thì $t = 0$, $x = r$ thì $t = \pi/2$

$$\begin{aligned}
 \text{Vậy, } I_3 &= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0 + 0) \right] \\
 &= \frac{\pi r^2}{4}
 \end{aligned}$$

d. Ta có $f(x) = \sin^7 2x$ là hàm số lẻ vì vậy theo tính chất của

tích phân xác định thì: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x dx = 0$

Bài 9: Tính các tích phân xác định sau đây

a. $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$

b. $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$

c. $I_3 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

Giải: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

a. Đặt $u = x$, $dv = e^{-x} dx$, từ đó ta có $du = dx$, $v = -e^{-x}$.

$$\text{Vậy } I_1 = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = \frac{e-2}{e}$$

b. Đặt $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{x^2 + 1} dx$

$$dv = x dx \text{ chọn } v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vậy } I_2 &= \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

c. Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên ta có:

$$I_3 = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \text{ chọn } v = -\frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vậy } I_3 &= 2 \left[-\frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} \right] \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{3 \cos \frac{\pi}{3}} - \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \ln \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \ln \tan \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \ln \tan \frac{5\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

♦ TÍCH PHÂN SUY RỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích phân suy rộng có cận vô hạn

• Nếu hàm $y = f(x)$ xác định khi $a \leq x < +\infty$ và khả tích trên mỗi đoạn hữu hạn $a \leq x \leq X$, $\forall X \geq a$ thì theo định nghĩa, tích phân suy rộng của hàm số f trên $[a, +\infty]$ được xác định bởi đẳng thức sau đây:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx \quad (1)$$

Nếu khi $X \rightarrow +\infty$, hàm $F(X) = \int_a^X f(x)dx$ có giới hạn hữu hạn,

thì ta gọi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là *hội tụ*. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ không hội tụ thì ta gọi tích phân suy rộng trên là *phân kỳ*.

• Tương tự: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^0 f(x)dx + \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(x)dx$$

2. Tích phân suy rộng của những hàm số không bị chặn

• Nếu hàm số $f(x)$ giới nội và khả tích trên mỗi đoạn $[a + \varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon > 0$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (2)$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân (2) được gọi là *hội tụ*, ngược lại nó được gọi là *phân kỳ*.

- Nếu hàm số $f(x)$ giới nội và khả tích trên mỗi đoạn $[a, b - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = +\infty$, ta định nghĩa :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (3)$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân (3) được gọi là *hội tụ*, ngược lại nó được gọi là *phân kỳ*.

- Nếu hàm $f(x)$ có gián đoạn loại hai tại điểm c của đoạn $[a, b]$ và liên tục khi $a \leq x < c$ và $c < x \leq b$, thì theo định nghĩa người ta đặt :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \quad (4)$$

Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ (trong đó $f(c) = \infty$, $a < c < b$)

được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại cả hai giới hạn ở vế phải của (4) và *phân kỳ* nếu không tồn tại dù chỉ một trong các giới hạn đó.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Tính tích phân suy rộng $I = \int_0^{+\infty} \cos x dx$

Giải:

$$\text{Xét } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \cos x dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} (\sin X - \sin 0) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sin x$$

Giới hạn này không tồn tại.

Do đó I phân kỳ.

Bài 2: Tính tích phân suy rộng $I = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Giải:

$$\text{Ta có } I = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_t^{-1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right) = 1$$

Nghĩa là I hội tụ.

Bài 3: Tính tích phân suy rộng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Giải:

Hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Vậy } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \text{ nghĩa là I hội tụ.}$$

Bài 4: Tính tích phân suy rộng $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$

Giải:

$$\text{Ta có } I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{dx}{(x-2)(x-1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Bigg|_2^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\ln \frac{t-1}{t+2} - \ln \frac{1}{4} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\ln \left[4 \frac{t-1}{t+2} \right] \right) = \frac{2}{3} \ln 2$$

Bài 5: Tính tích phân suy rộng $I = \int_0^1 \frac{dx}{x}$

Giải:

Hàm dưới dấu tích phân $f(x) = \frac{1}{x}$ không giới nội tại điểm $x = 0$, nên ta có:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \ln x \right|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty$$

Bài 6: Tính tích phân suy rộng $I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Giải:

Ta có: $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Xét $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x = t^2 \ (t \geq 0) \Rightarrow$

$dx = -2tdt$. Thì: $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_1^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{-2tdt}{(1+t^2)t} = 2 \int_{\sqrt{\phi}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$

$\Rightarrow \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = 2 \left[\arctan 1 - \arctan \sqrt{\varepsilon} \right] =$

$\Rightarrow I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2 \left[\arctan 1 - \arctan \sqrt{\varepsilon} \right] = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính các tích phân xác định sau đây:

$$I_1 = \int_0^2 |1-x| dx$$

$$I_2 = \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$I_4 = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$I_5 = \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$I_6 = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

$$I_9 = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

$$I_{10} = \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$$

2. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì:

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$b. \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

Áp dụng tính $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^4 x} dx$

3. Tính các tích phân suy rộng sau đây:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx$$

$$I_9 = \int_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$$I_{10} = \int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx$$

$$I_{11} = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

$$I_{12} = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

$$I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{e^{3x}} dx$$

$$I_{14} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+5)\sqrt{x+1}} dx$$

$$I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}} dx$$

$$I_{16} = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2+4}{e^{x+1}} dx$$

$$I_{17} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$I_{18} = \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$$

$$I_{19} = \int_1^{+\infty} \frac{3x+2}{e^x} dx$$

$$I_{20} = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$I_{21} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$I_{22} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

$$I_{23} = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$$

$$I_{24} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{e^{-2x} + 1}$$

$$I_{25} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$$

$$I_{26} = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$I_{27} = \int_1^4 \frac{\ln x}{x^4} dx$$

$$I_{28} = \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$I_{29} = \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_{30} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$$

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$I_{32} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{e^{-2x} + 1}$$

Chương VI

HÀM NHIỀU BIẾN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Miền xác định của hàm

Cho tập hợp khác rỗng D và $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ đi từ D vào $\mathbb{R}$ được gọi là hàm n biến.

Ký hiệu: $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ hay $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

* Tập hợp D gọi là *tập xác định* của f

* Giá trị của $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tại điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ được ký hiệu là $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ hoặc $f(M_0)$.

II. Đạo hàm riêng

Giả sử hàm $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định trong tập mở D , $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ là một điểm thuộc D . Đặt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

Nếu $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i}$, ($1 \leq i \leq n$) tồn tại hữu hạn thì giới hạn này

gọi là đạo hàm riêng của hàm $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tại M_0 theo biến x_i và ký hiệu:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}, u'_{x_i}, f'_{x_i}$$

$$\text{Vậy: } \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i}, (1 \leq i \leq n)$$

Việc tính đạo hàm riêng, thực chất là tính đạo hàm của hàm một biến (khi ta xem các biến số kia là hằng số)

III. Đạo hàm riêng cấp cao

- Đạo hàm riêng của $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ theo biến x_k ($k = \overline{1, n}$) tức là

biểu thức: $\frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$, được gọi là đạo hàm riêng cấp

hai của u theo biến x_i, x_k và ký hiệu bằng một trong

những ký hiệu sau: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, u''_{x_i x_k}$

Tương tự ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn cấp hai.

- Nếu hàm f có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục tại điểm M , thì đạo hàm hỗn hợp cấp n tùy ý tại điểm M không phụ thuộc vào thứ tự của các biến được lấy đạo hàm riêng.

IV. Đạo hàm hàm hợp

Nếu $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, ($i = \overline{1, n}$)

$$\text{khả vi thì: } \frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

V. Vi phân cấp 1 và cấp 2

Cho $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục, ta có vi phân cấp 1 và vi phân cấp 2 của f lần lượt như sau:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

$$d^2z = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

VI. Cực trị của hàm nhiều biến

1. Hàm lồi, hàm lõm

i) Tập lồi: Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. D được gọi là *tập lồi* nếu

$$\forall x, x' \in D, \forall \lambda \in (0, 1) \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)x' \in D$$

ii) Hàm số $y = f(x)$ gọi là *lồi ngặt toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x') < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x'), \quad \forall x, x' \in D, \forall \lambda \in (0, 1)$$

hoặc nếu tại mọi điểm (x_0, y_0) , tiếp tuyến với đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới đồ thị (đối với các bài toán kinh tế thường gặp).

iii) Hàm số $y = f(x)$ gọi là *lõm ngặt toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x') > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x'), \quad \forall x, x' \in D, \forall \lambda \in (0, 1)$$

hoặc nếu tại mọi điểm (x_0, y_0) , tiếp tuyến với đồ thị nằm hoàn toàn phía trên đồ thị (đối với các bài toán kinh tế thường gặp).

iv) Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là *lồi ngặt toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu

$$f(\lambda X + (1-\lambda)X') < \lambda f(X) + (1-\lambda)f(X'), \forall X, X' \in D, \forall \lambda \in (0,1)$$

hoặc nếu tại mọi điểm (x_0, y_0, z_0) tiếp diện với đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới đồ thị (đối với các bài toán kinh tế thường gặp) .

v) Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là *lõm ngặt toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu

$$f(\lambda X + (1-\lambda)X') > \lambda f(X) + (1-\lambda)f(X'), \forall X, X' \in D, \forall \lambda \in (0,1)$$

hay nếu tại mọi điểm (x_0, y_0, z_0) tiếp diện với đồ thị nằm hoàn toàn phía trên đồ thị (đối với các bài toán kinh tế thường gặp) .

vi) Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là *lồi toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu

$$f(\lambda X + (1-\lambda)X') \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(X'), \forall X, X' \in D, \forall \lambda \in (0,1)$$

vii) Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là *lõm toàn cục* trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu

$$f(\lambda X + (1-\lambda)X') \geq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(X'), \forall X, X' \in D, \forall \lambda \in (0,1)$$

2. Cực trị địa phương, cực trị toàn cục của hàm số thực theo một biến số thực

Xét hàm số: $y = f(x), x \in D \subset \mathbb{R}$

- Hàm số f gọi là đạt cực đại địa phương tại $x_0 \in D$ nếu:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D : f(x) \leq f(x_0)$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

- Hàm số f gọi là đạt cực tiểu địa phương tại x_0 nếu:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D : f(x) \geq f(x_0)$$

- Hàm số f gọi là đạt cực đại toàn cục trên D tại x_0 nếu:

$$\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$$

- Hàm số f gọi là đạt cực tiểu toàn cục trên D tại x_0 nếu:

$$\forall x \in D, f(x) \geq f(x_0)$$

Chú ý:

- Một cực trị địa phương không chắc là cực trị toàn cục.
- Không phải hàm số nào cũng có cực trị toàn cục.
- Trong các ứng dụng kinh tế, hầu hết các hàm số chỉ có một cực trị địa phương duy nhất và đó cũng là cực trị toàn cục.
- Trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}$, đối với các bài toán kinh tế thường gặp ta có :
 - + Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in D$ thì f lồi ngặt toàn cục trên D . Khi đó, một điểm cực tiểu địa phương cũng là cực tiểu toàn cục trên D .
 - + Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in D$ thì f lõm ngặt toàn cục trên D . Khi đó, một điểm cực đại địa phương cũng là cực đại toàn cục trên D .

3. Cực trị địa phương, cực trị toàn cục của hàm số thực theo hai biến số thực

Xét hàm số $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Đặt

$$B((x_0, y_0), \varepsilon) = \left\{ (x, y) / \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \right\}, \varepsilon > 0$$

- Hàm số f gọi là đạt cực đại địa phương tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D : f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

- Hàm số f gọi là đạt cực tiểu địa phương tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D : f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

- Hàm số f gọi là đạt cực đại toàn cục tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu:

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

- Hàm số f gọi là đạt cực tiểu toàn cục tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu:

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Các chú ý ở trường hợp hàm một biến vẫn đúng cho trường hợp hai biến.

- ♦ Điều kiện cần của cực trị địa phương (điều kiện cấp 1):

Nếu hàm f đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0) và f có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) thì

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

- ♦ Điều kiện đủ của cực trị địa phương (điều kiện cấp 2)

Nhắc lại: Cho $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục, ta có vi phân cấp 1 và vi phân cấp 2 của f lần lượt như sau:

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

$$d^2z = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Ta có:

$$d^2z = f''_{xx} \left[dx + \frac{f''_{xy} dy}{f''_{xx}} \right]^2 + \left[\frac{f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2}{f''_{xx}} \right] dy^2 \quad (\text{giả sử } f''_{xx} \neq 0)$$

Suy ra:

$$+ \text{ Nếu } f''_{xx} < 0 \text{ và } f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2 > 0 \text{ thì } d^2z < 0$$

$$+ \text{ Nếu } f''_{xx} > 0 \text{ và } f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2 > 0 \text{ thì } d^2z > 0$$

Bây giờ, ta có điều kiện đủ của cực trị địa phương như sau:

- Nếu $df(x_0, y_0) = 0$ và $d^2f(x_0, y_0) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại (x_0, y_0) .
- Nếu $df(x_0, y_0) = 0$ và $d^2f(x_0, y_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0) .

$$\text{Ta xét ma trận Hess: } H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Đặt: } H_1 = f''_{xx}, \quad H_2 = |H|$$

Ta có:

$$i) \quad H_1 < 0, H_2 > 0 \text{ thì } d^2f < 0 \text{ (cực đại địa phương)}$$

ii) $H_1 > 0, H_2 > 0$ thì $d^2f > 0$ (cực tiểu địa phương)

+ Nếu $d^2z(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$ thì f lõm ngặt toàn cục trên D . Khi đó, một điểm cực tiểu địa phương cũng là cực tiểu toàn cục trên D .

+ Nếu $d^2z(x, y) < 0, \forall (x, y) \in D$ thì f lồi ngặt toàn cục trên D . Khi đó, một điểm cực đại địa phương cũng là cực đại toàn cục trên D .

Định lý: Cho $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên tập mở và lồi $D \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử, tại $(x_0, y_0) \in D$ ta có: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Khi đó

i) Nếu $H_1(x, y) > 0, H_2(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$

thì f đạt cực tiểu toàn cục trên D tại (x_0, y_0)

ii) Nếu $H_1(x, y) < 0, H_2(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$

thì f đạt cực đại toàn cục trên D tại (x_0, y_0)

4. Cực trị ràng buộc của hàm số thực theo 2 biến số thực

Xét bài toán tìm cực trị hàm $f(x, y)$ với ràng buộc

$$g(x, y) = g_0 \text{ (giả sử } g_0 > 0 \text{)}$$

Trước tiên, ta lập hàm Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [g_0 - g(x, y)]$$

(λ gọi là nhân tử Lagrange)

Ta thấy cực trị của hàm f với ràng buộc $g(x, y) = g_0$ cũng chính là cực trị của hàm Lagrange L .

Ta có điều kiện cấp 1 tương tự trường hợp cực trị không ràng buộc

Điều kiện cấp 1: Nếu L đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0, λ_0) thì $L'_x = 0$, $L'_y = 0$ và $L'_\lambda = 0$ (hay $dL = 0$) tại (x_0, y_0, λ_0) .

Điều kiện cấp 2:

Ta định nghĩa Hesse bao như sau:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\text{Đặt} \quad |\overline{H}_1| = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{x\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}, \quad |\overline{H}_2| = |\overline{H}|$$

Ta có các định lý sau:

- Nếu $dL(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ và $|\overline{H}_1| < 0$ tại (x_0, y_0, λ_0) , $|\overline{H}_2| > 0$ tại (x_0, y_0, λ_0) thì L đạt cực đại địa phương tại (x_0, y_0, λ_0) .
- Nếu $dL(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ và $|\overline{H}_1| < 0$ tại (x_0, y_0, λ_0) , $|\overline{H}_2| < 0$ tại (x_0, y_0, λ_0) thì L đạt cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0, λ_0) .

- Nếu $dL(x_o, y_o, \lambda_o) = 0$ và $|\overline{H}_1| < 0$, $|\overline{H}_2| > 0$, $\forall (x, y, \lambda)$ thì (x_o, y_o) là điểm cực đại toàn cục của f với ràng buộc $g(x_o, y_o) = g_o$.
- Nếu $dL(x_o, y_o, \lambda_o) = 0$ và $|\overline{H}_1| < 0$, $|\overline{H}_2| < 0$, $\forall (x, y, \lambda)$ thì (x_o, y_o) là điểm cực tiểu toàn cục của f với ràng buộc $g(x_o, y_o) = g_o$.

Chú ý: Bài toán tìm cực trị hàm $f(x, y)$ với ràng buộc $g(x, y) = g_o$ có thể giải đơn giản bằng cách từ ràng buộc, rút y theo x (hay x theo y) và thế vào f . Từ đó, bài toán đưa về việc tìm cực trị của hàm một biến. Tuy nhiên, không phải lúc nào ta cũng rút được biến này theo biến kia. Hơn nữa, phương pháp Lagrange áp dụng được cho trường hợp hàm nhiều biến tổng quát với nhiều ràng buộc và nhân tử Lagrange λ có ý nghĩa đặc biệt trong kinh tế.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Tìm $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Giải:

Xem y là hằng số, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$$

Xem x là hằng số, ta được:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$$

Bài 2: Cho hàm $z = z(x, y) = e^{x^2+y^2}$ Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Giải: Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_y = 2y e^{x^2+y^2}$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng hàm $z(x, y) = y \ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Giải: Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

Thay các đạo hàm riêng vào vế trái của phương trình, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Vế trái} &= \frac{1}{x} \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \left[\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right] \\ &= \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2} \\ &= \text{Vế phải} \end{aligned}$$

Bài 4: Tính du với

a. $u(x, y) = \arctg\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

b. $u(x, y) = x^{y^2}$

Giải:

a. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Từ đó:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

2. Ta có

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{Trong đó:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x$$

Do đó

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = y^2 x^{y^2-1} dx + 2yx^{y^2} \ln x dy$$

Bài 5: Cho hàm $u(x, y) = y \ln x$. Tìm $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Giải:

Ta có các đạo hàm riêng của hàm $u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x$$

Nên:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

Bài 6: Cho hàm $u(x, y) = \sin x \cdot \sin y$. Tính d^2u

Giải:

Ta có các đạo hàm riêng của hàm $u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \cos y$$

Các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $u(x, y)$ là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \cos x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$$

Vậy:

$$d^2u = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2$$

Bài 7: Tìm cực trị của các hàm sau đây

a. $u(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

b. $u(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

c. $u(x, y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y} + 2$

Giải:

a. Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 3$ và $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y - 6$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $M_0(0, 3)$ là điểm dừng.

Các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm $M_0(0, 3)$ là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

Mã trận Hesse tại $M_0(0, 3)$ là $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có: $H_1 = 2 > 0$ và $H_2 = |H| = 3 > 0$.

Vậy hàm $u(x, y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(0, 3)$.

b. Các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} \quad \text{và} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{47}{4}$$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{47}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 21 \\ y_0 = 20 \end{cases}$$

Điểm dừng là $M_0(21, 20)$.

Các đạo hàm cấp hai tại điểm $M_0(21, 20)$ là:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$$

Ma trận Hesse tại điểm $M_0(21, 20)$ là:
$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$H_1 = -\frac{2}{3} < 0$$

$$H_2 = |H| = \frac{47}{144} < 0$$

Nên hàm $u(x, y)$ đạt cực đại tại $M_0(21, 20)$

c. Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2}$ và $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{1}{y^2}$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{y}{2x} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ y^2 = 4x^2 \\ \frac{y}{2x} = \frac{1}{y^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ y = 2x \\ \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Các đạo hàm riêng cấp hai là:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}$$

+ Xét tại $M_1\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, ta có ma trận Hesse tại $M_1\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vì } H_1 = -4 < 0$$

$$H_2 = -12 < 0$$

nên hàm $u(x, y)$ không đạt cực trị tại $M_1\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

+ Xét tại $M_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ta có ma trận Hesse tại $M_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vì } H_1 = 4 > 0$$

$$H_2 = 12 > 0$$

nên hàm $u(x, y)$ đạt cực tiểu tại $M_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ và có giá trị cực tiểu là $u(M_2) = 4$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính các đạo hàm riêng của các hàm sau đây

a. $u(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$

b. $u(x, y) = e^{xy(x^2+y^2)}$

c. $u(x, y) = e^{3x^2+2y^2-xy}$

d. $u(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$

e. $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}$

f. $u(x, y) = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

2. Xét hàm $u(x, y) = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Chứng tỏ rằng hàm

$u(x, y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$

3. Tính vi phân toàn phần của các hàm sau đây

a. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$,

b. $u(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

c. $u(x, y) = e^{x^2y}$

d. $u(x, y) = x^y - y^x$

e. $u(x, y) = e^x(\cos y + x \sin y)$

4. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm sau đây

a. $u(x, y) = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

b. $u(x, y) = xy + \sin(x + y)$

c. $u(x, y) = \sin(x + \cos y)$

d. $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

e. $u(x, y) = e^{xy}$

f. $u(x, y) = e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

5. Tìm cực trị của các hàm sau đây

a. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$

b. $f(x, y) = x + y + \frac{8}{xy}$

c. $f(x, y) = x + y + \frac{81}{xy}$

d. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

e. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

f. $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy + 1$

6. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau đây

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ nếu x, y thỏa mãn $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

b. $f(x, y) = x^2 + y^2$ nếu x và y thỏa mãn điều kiện $x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0$

c. $f(x, y) = x^2 + 12xy + y^2$ nếu x và y thỏa mãn điều kiện $4x^2 + y^2 = 25$

d. $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$ nếu x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$

e. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ nếu x, y thỏa mãn điều kiện $x + y + 3 = 0$

f. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ nếu x, y thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$

7. Cho hàm $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x, y)$ trên miền (D) giới hạn bởi các đường thẳng $x + y = 6$, $x = 0$ và $y = 0$

8. Cho hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x, y)$ trên miền (D): $x^2 + y^2 \leq 4$

9. Hàm $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$ có hai điểm dừng là $A(0, 0)$ và $B(18, 6)$. Chọn kết luận đúng

a. Hàm f không đạt cực trị địa phương tại A , đạt cực đại địa phương tại B

- b. Hàm f đạt cực tiểu địa phương tại A , đạt cực đại địa phương tại B
- c. Hàm f không đạt cực trị địa phương tại A , đạt cực tiểu địa phương tại B
- d. Hàm f đạt cực đại địa phương tại A , đạt cực tiểu địa phương tại B

10. Cho hàm $z(x, y) = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- a. Hàm z đạt cực tiểu tại $M(0, 1)$
- b. Hàm z đạt cực đại tại $M(0, 1)$
- c. Hàm z có điểm dừng nhưng không có cực trị.
- d. Hàm z không có điểm dừng.

11. Cho hàm $f(x, y) = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- a. Hàm f đạt cực tiểu tại $M(0, 0)$
- b. Hàm f đạt cực đại tại $M(0, 0)$
- c. Hàm f có điểm dừng nhưng không có cực trị
- d. Hàm f không có điểm dừng

12. Xét hàm $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$ và điểm $M(0, 1)$. Chọn kết luận đúng

- a. Hàm f đạt cực tiểu tại M
- b. Hàm f đạt cực đại tại M

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

c. M là điểm dừng nhưng không phải cực trị của hàm f

d. M không phải là điểm dừng của hàm f

13. Vi phân toàn phần của hàm $f(x, y) = x^2 + 2^y$ là kết quả nào sau đây

a. $df = 2x dx + 2^y dy$

b. $df = 2x dx + 2^y \ln 2 dy$

c. $df = 2x dx + y 2^{y-1} dy$

d. $df = 2x dx + y 2^y \ln 2 dy$

14. Tính vi phân toàn phần cấp hai của các hàm

a. $f(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x > 0, y > 0)$

b. $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (x > 0, y > 0)$

c. $u(x, y) = e^{6x-5y}$

d. $v(x, y) = \ln(5x - 6y)$

Chương VII

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. Phương trình vi phân cấp 1

- **Định nghĩa:** Phương trình vi phân là một phương trình chứa mối liên hệ giữa hai biến x, y (mà trong đó ta xem y là một hàm khả vi của x) và các đạo hàm của y . Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y xuất hiện trong phương trình.
- **Định nghĩa:** Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng $F(x; y, y') = 0$ (1) hay $y' = f(x; y)$ (2)
- **Nghiệm tổng quát – Nghiệm riêng:**

* Nghiệm tổng quát của (1) (hoặc (2)) trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ là hàm $y = \phi(x; C)$ sao cho :

- Thỏa phương trình đã cho với mọi giá trị của hằng số C bất kỳ thuộc một tập nào đó.
- Với mọi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ sao cho $(x_0; y_0) \in D$ chỉ có một giá trị duy nhất C_0 thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Mọi nghiệm $y = \phi(x; C_0)$ nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \phi(x; C)$ ứng với giá trị cụ thể C_0 được gọi là *nghiệm riêng*.

1. PTVP tách biến (có biến số phân ly)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng: $f(x)dx = g(y)dy$

Để tìm nghiệm của phương trình trên, ta lấy tích phân bất định hai vế:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Khi đó, ta có : $F(x) = G(y) + C$ trong đó F là nguyên hàm của f , G là nguyên hàm của g và C là hằng số bất kỳ.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Giải phương trình $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$

Giải: Phương trình đã cho viết lại

$$x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{y}{1+y^2}dy \quad \text{vì } (1+x^2) \neq 0 \text{ và } (1+y^2) \neq 0$$

Tích phân bất định hai vế, ta có

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C^2 \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = C^2(1+x^2) \quad (C \neq 0)$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$1 + y^2 = C^2(1 + x^2) \quad (C \neq 0)$$

Bài 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$(1 + x^2)dy = xydx$$

biết rằng $y(1) = 2$.

Giải: Phương trình đã cho viết lại

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1+x^2} \quad (y \neq 0)$$

Tích phân bất định hai vế, ta có

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow y = C\sqrt{1 + x^2} \quad (C \neq 0)$$

Mặt khác, ta nhận thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C\sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{Vì } y(1) = 2 \text{ nên suy ra } 2 = C\sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm riêng ứng với $y(1) = 2$ là

$$y = \sqrt{2(1 + x^2)}$$

2. PTVP tuyến tính cấp 1

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng: $y' + P(x).y = Q(x)$ (1)

trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm liên tục trong một khoảng nào đó.

Bước 1: Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng

$$y' + P(x).y = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

Ngoài nghiệm $y = 0$, ta còn có: $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + C$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-\int P(x)dx} = B \cdot e^{-\int P(x)dx} \quad (B \neq 0)$$

Kết hợp nghiệm $y = 0$, ta có nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = A \cdot e^{-\int P(x)dx} \quad (A \text{ là hằng số bất kỳ})$$

Bước 2: Xem $A = A(x)$. Nghiệm tổng quát của (1) có dạng là

$$y = A(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Thay vào (1) ta có: $A'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$

$$\Rightarrow A(x) = \int \left(Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \right) dx + K \quad (K \text{ là hằng số})$$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là

$$y = \left[\int \left(Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \right) dx + K \right] \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

B. BÀI TẬP

Bài 3: Giải phương trình $y' + \frac{1}{x+1}y = x-1$ (1)

Giải: Xét phương trình $y' + \frac{1}{x+1}y = 0$ (2)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+1}$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của (2) là $y = \frac{C}{x+1}$

Xem $C = C(x)$ thì nghiệm tổng quát của (1) có dạng

$$y = \frac{C(x)}{x+1}$$

Thay vào (1), ta có

$$\left[\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2} \right] + \frac{C(x)}{(x+1)^2} = x-1$$

$$\Rightarrow C'(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + K \quad (K \text{ là hằng số})$$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là

$$y = \left[\frac{1}{3}x^3 - x + K \right] \times \frac{1}{x+1}$$

Bài 4: Tìm nghiệm của phương trình

$$y' - y.\operatorname{tg}x = -2e^{\sin x} \quad (1)$$

thỏa mãn $y(0) = 3$

Giải: Xét phương trình $y' - y.\operatorname{tg}x = 0 \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\operatorname{tg}x$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của (2) là $y = \frac{C}{\cos x}$

Xem $C = C(x)$ thì nghiệm tổng quát của (1) có dạng

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}$$

Thay vào (1), ta có

$$\left[\frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{C(x).\sin x}{\cos^2 x} \right] + \frac{C(x)}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -2e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow C'(x) = -2e^{\sin x} \cos x$$

$$\Rightarrow C(x) = 2e^{\sin x} + K \quad (K \text{ là hằng số})$$

Khi đó, nghiệm tổng quát của (1) là

$$y = (2e^{\sin x} + K) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Vì } y(0) = 3 \text{ nên } 3 = -2 + K \Leftrightarrow K = 5$$

Vậy, nghiệm của (1) thỏa điều kiện $y(0) = 3$ là

$$y = (2e^{\sin x} + 1) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

3. PTVP cấp bernouilly

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng: $y' + P(x).y = Q(x).y^\alpha \quad (\alpha \neq 0; \alpha \neq 1)$

với $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm liên tục trong một khoảng nào đó.

Với $y \neq 0$, ta có thể chia hai vế của phương trình cho y^α :

$$y^{-\alpha}.y' + P(x).y^{1-\alpha} = Q(x)$$

$$\text{Đặt } z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1 - \alpha).y^{-\alpha}.y'$$

Thay vào phương trình đã cho, ta sẽ có một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 của x và z .

B. BÀI TẬP

Bài 5: Giải phương trình $y' - y = xy^5$ (1)

Giải:

Nhận xét rằng $y = 0$ là một nghiệm của (1)

Với $y \neq 0$, ta chia hai vế của (1) cho y^5 :

$$y'.y^{-5} - y^{-4} = x$$

$$\text{Đặt } z = y^{-4} \Rightarrow z' = -4.y^{-5}.y'$$

$$\text{Khi đó, ta có: } -\frac{1}{4}z' - z = x$$

$$\Rightarrow z' + 4z = -4x \quad (2)$$

$$\text{Xét } z' + 4z = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -4z$$

$$\Rightarrow z = C.e^{-4x} \text{ là nghiệm tổng quát của (3)}$$

Xem $C = C(x)$ thì nghiệm tổng quát của (2) có dạng

$$z = C(x) \cdot e^{-4x}$$

Thay vào (2), ta có:

$$\left[C'(x) \cdot e^{-4x} - 4C(x) \cdot e^{-4x} \right] + 4C(x) \cdot e^{-4x} = -4x$$

$$\Rightarrow C'(x) = -4xe^{4x}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - xe^{4x} + K \quad (K \text{ là hằng số})$$

Nên nghiệm tổng quát của (2) là

$$z = \left[\frac{1}{4}e^{4x} - xe^{4x} + K \right] e^{-4x} = \frac{1}{4} - x + Ke^{-4x}$$

$$\text{Vì } z = y^{-4} \text{ nên } y^{-4} = \frac{1}{4} - x + Ke^{-4x}$$

Vậy, nghiệm của (1) là

$$y = 0 \text{ hay } y^{-4} = \frac{1}{4} - x + Ke^{-4x}$$

$$\textbf{Bài 6:} \text{ Giải phương trình } y' - \frac{y}{2x} = -\frac{\sin x}{2x} \cdot y^3 \quad (1)$$

Giải: Ta nhận thấy $y = 0$ thỏa phương trình (1)

$$\text{Với } y \neq 0, (1) \Leftrightarrow y^{-3} \cdot y' - \frac{1}{2x} \cdot y^{-2} = -\frac{\sin x}{2x} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2 \cdot y^{-3} \cdot y'.$$

Thay vào (2), ta có:

$$-\frac{1}{2}.z' - \frac{1}{2x}.z = -\frac{\sin x}{2x}$$

$$\Rightarrow z' + \frac{1}{x}.z = \frac{\sin x}{x} \quad (3)$$

$$\text{Xét phương trình } z' + \frac{1}{x}.z = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

Suy ra nghiệm tổng quát của (4) là

$$z = \frac{A}{x} \quad (A \text{ là hằng số bất kỳ})$$

Xem $A = A(x)$ thì nghiệm tổng quát của (3) có dạng

$$z = \frac{A(x)}{x}$$

Thay vào (3), ta có

$$\left[\frac{A'(x)}{x} - \frac{A(x)}{x^2} \right] + \frac{1}{x} \times \frac{A(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow A'(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow A(x) = -\cos x + K \quad (K \text{ là hằng số})$$

$$\text{Nghiệm tổng quát của (3) là } z = \frac{-\cos x + K}{x}$$

$$\text{Vì } z = y^{-2} \text{ nên } \frac{1}{y^2} = \frac{-\cos x + K}{x}$$

$$\text{Vậy, nghiệm của (1) là: } y^2.(K - \cos x) = x \text{ hay } y = 0$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giải các phương trình vi phân cấp 1 sau đây

a. $y' = e^{\sin x} \cos x$

b. $y' = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

c. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

2. Tìm nghiệm của phương trình sau đây thỏa mãn $y(0) = 0$

$$(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$$

3. Giải các phương trình vi phân cấp 1 tuyến tính sau đây

a. $y' + 2xy = x.e^{-x^2}$

b. $y' - y \sin x = \sin x \cdot \cos x$

c. $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

d. $(1+x^2)y' + y = \arctg x$

e. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

f. $y = xy' + y' \cdot \ln y$

4. Giải các phương trình Bernouilly sau đây

a. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

b. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{y}$

c. $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$

d. $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$

II. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt

- **Định nghĩa:**

Phương trình vi phân cấp 2 có dạng:

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \quad (1)$$

hay $y'' = f(x; y; y')$ (2)

- **Nghiệm tổng quát – Nghiệm riêng:**

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 là họ hàm $y = \phi(x; C_1; C_2)$ thỏa mãn

* Khi thay $y = \phi(x; C_1; C_2)$ vào phương trình đã cho, ta có một đẳng thức đúng.

* Với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$, nếu tồn tại $(C_1^0; C_2^0)$ làm cho nghiệm $y = \phi(x; C_1^0; C_2^0)$ thỏa điều kiện đã cho thì $y = \phi(x; C_1^0; C_2^0)$ được gọi là *nghiệm riêng* thỏa điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2 TUYẾN TÍNH CÓ HỆ SỐ HẲNG VỚI VẾ PHẢI ĐẶC BIỆT

Dạng tổng quát: $y'' + ay' + by = f(x)$ (1)

với a, b là các số thực

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **Định nghĩa:**

Hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* trong (α, β) nếu tồn tại hai số thực C_1, C_2 không đồng thời bằng 0 sao cho $C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) = 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$

Hai hàm không phụ thuộc tuyến tính sẽ được gọi là *độc lập tuyến tính*.

- **Định lý:**

Xét phương trình $y'' + ay' + by = 0$ (2). Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2) thì nghiệm tổng quát của (2) là

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ là hằng số})$$

- **Định lý:**

Nếu $u(x)$ là nghiệm riêng của phương trình (1) và $Y(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình (2) thì nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y(x) = Y(x) + u(x)$$

Phương pháp giải phương trình (1)

• **Bước 1:** Xét phương trình $y'' + ay' + by = 0$ (2). Tìm nghiệm tổng quát của (2) như sau.

Phương trình đặc trưng: $k^2 + ak + b = 0$ (*)

÷ (*) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2$: (2) có nghiệm tổng quát là

$$Y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (C_1, C_2 \text{ là hằng số})$$

÷ (*) có nghiệm thực kép k_0 : (2) có nghiệm tổng quát là

$$Y(x) = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x} \quad (C_1, C_2 \text{ là hằng số})$$

÷ (*) có hai nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$: (2) có nghiệm tổng quát là

$$Y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] \quad (C_1, C_2 \text{ là hằng số})$$

• **Bước 2:** Tìm nghiệm riêng của (1) dựa vào vế phải $f(x)$ có dạng đặc biệt trong những trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x và α là hằng số.

÷ Nếu α không phải nghiệm của phương trình đặc trưng thì (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x .

÷ Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = x e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

÷ Nếu α là nghiệm kép $u(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$

$$u(x) = x^2 e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_m(x) \cdot \sin(\beta x)]$

÷ Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải nghiệm của phương trình đặc trưng thì (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = e^{\alpha x} \cdot [R(x) \cdot \cos(\beta x) + S(x) \cdot \sin(\beta x)]$$

trong đó $R(x)$ và $S(x)$ là các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng $\max\{m; n\}$.

÷ Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = x e^{\alpha x} \cdot [R(x) \cdot \cos(\beta x) + S(x) \cdot \sin(\beta x)]$$

• **Bước 3:** Nghiệm tổng quát của (1) là

$$y(x) = Y(x) + u(x)$$

NGUYÊN LÝ CHỒNG CHẤT NGHIỆM

Nếu vế phải của (1) có dạng $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ và $\bar{y}_k$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

thì $y = \sum_{k=1}^n \bar{y}_k$ là nghiệm riêng của (1).

B. BÀI TẬP

Bài 1: Giải phương trình $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$ (1)

Giải: Xét phương trình $y'' - 2y' - 3y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng : $k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1; k = 3$

Nên nghiệm tổng quát của (2) là : $Y(x) = C_1.e^{-x} + C_2.e^{3x}$

Ta thấy $f(x) = e^{-x} = e^{-x}.P_0(x)$. Vì $\alpha = -1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = x.e^{-x}.Q_0(x) = A.x.e^{-x}$$

$$\Rightarrow u'(x) = A.e^{-x} - A.x.e^{-x}$$

$$\text{và } u''(x) = -A.e^{-x} - A.e^{-x} + A.x.e^{-x} = -2A.e^{-x} + A.x.e^{-x}$$

Thay vào (1) ta có : $u'' - 2u' - 3u = e^{-x}$

$$\Rightarrow (-2A.e^{-x} + A.x.e^{-x}) - 2(A.e^{-x} - A.x.e^{-x}) - 3(A.x.e^{-x}) = e^{-x}, \forall x$$

$$\Rightarrow -4A = 1$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó: } u(x) = -\frac{x}{4}.e^{-x}$$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x) + u(x) \\ &= C_1.e^{-x} + C_2.e^{3x} + \left(-\frac{x}{4}.e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Bài 2: Giải phương trình $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$ (1)

Giải: Xét phương trình $y'' - 8y' + 16y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow k = 4$ (kép)

Nên nghiệm tổng quát của (2) là : $Y(x) = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4x}$

Ta thấy $f(x) = e^{4x} = e^{4x} \cdot P_0(x)$. Vì $\alpha = -1$ không thỏa phương trình đặc trưng nên (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = e^{4x} \cdot x^2 \cdot A = A \cdot x^2 \cdot e^{4x}$$

$$\Rightarrow u'(x) = 2Ax \cdot e^{4x} + 4A \cdot x^2 \cdot e^{4x}$$

$$\text{và } u''(x) = (2A \cdot e^{4x} + 8Ax \cdot e^{4x}) + (8A \cdot x \cdot e^{4x} + 16Ax^2 \cdot e^{4x})$$

Thay vào (1) ta có : $u'' - 8u' + 16u = e^{4x}$

$$\begin{aligned} (16Ax^2 \cdot e^{4x} + 16Ax \cdot e^{4x} + 2A \cdot e^{4x}) - 8(2Ax \cdot e^{4x} + 4A \cdot x^2 \cdot e^{4x}) + \\ + 16(A \cdot x^2 \cdot e^{4x}) = e^{4x}, \forall x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2A = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó: } u(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{4x}$$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y(x) = Y(x) + u(x)$$

$$= C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{4x}$$

Bài 3: Giải phương trình $y'' - 2y' + y = x + 1$ (1)

Giải: Xét phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ (kép)

Nên nghiệm tổng quát của (2) là: $Y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$

Ta thấy $f(x) = x + 1 = e^{0x} \cdot P_1(x)$. Vì $\alpha = 0$ không thỏa phương trình đặc trưng nên (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = (Ax + B) \cdot e^{0x} = Ax + B$$

$$\Rightarrow u'(x) = A \text{ và } u''(x) = 0$$

Thay vào (1) ta có: $u'' - 2u' + u = x + 1$

$$\Rightarrow 0 - 2A + (Ax + B) = x + 1, \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Do đó: $u(x) = x + 3$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là

$$y(x) = Y(x) + u(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + (x + 3)$$

Bài 4: Giải phương trình $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ (1)

Giải: Xét phương trình: $y'' + y' - 2y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1; k = -2$

Nên nghiệm tổng quát của (2) là: $Y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$

Ta thấy $f(x) = \cos x - 3\sin x = e^{0x} \cdot [P_0(x) \cdot \cos x + Q_0(x) \cdot \sin x]$.

Vì $\alpha \pm i\beta = \pm i$ nên (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = e^{0x} \cdot [R_0(x) \cdot \cos x + S_0(x) \cdot \sin x] = A \cos x + B \sin x$$

$$\Rightarrow u'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\text{và } u''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

Thay vào (1) ta có: $u'' + u' - 2u = \cos x - 3\sin x$

$$\Rightarrow (-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x)$$

$$-(A \cos x + B \sin x) = \cos x - 3\sin x, \forall x$$

$$\Rightarrow (-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = \cos x - 3\sin x, \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + B = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Do đó: $u(x) = \sin x$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x) + u(x) \\ &= C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x} + \sin x \end{aligned}$$

Bài 5: Giải phương trình $y'' + y = 4x \sin x$ (1)

Giải : Xét phương trình: $y'' + y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$

Nên nghiệm tổng quát của (2) là: $Y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

Ta thấy $f(x) = 4x \cdot \sin x = e^{0x} \cdot [P_0(x) \cdot \cos x + Q_0(x) \cdot \sin x]$. Vì $\alpha \pm i\beta = \pm i$ nên (1) có nghiệm riêng dưới dạng

$$u(x) = x \cdot e^{0x} \cdot [R_0(x) \cdot \cos x + S_0(x) \cdot \sin x]$$

nghĩa là $u(x) = x \cdot e^{0x} \cdot [(Ax + B) \cdot \cos x + (Cx + D) \cdot \sin x]$

$$\Rightarrow u(x) = (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x$$

$$\Rightarrow u'(x) = [Cx^2 + (2A + D)x + B] \cdot \cos x$$

$$+ [-Ax^2 + (2C - B)x + D] \cdot \sin x$$

$$\text{Và } u''(x) = [-Ax^2 + (4C - B)x + 2A + 2D] \cdot \cos x$$

$$+ [-Cx^2 - (4A + D)x + 2C - 2B] \cdot \sin x$$

Thay vào (1) ta có: $u'' + u = 4x \cdot \sin x$. Suy ra :

$$(4Cx + 2A + 2D) \cos x + (-4Ax + 2C - 2B) \sin x = 4x \cdot \sin x, \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4C = 0 \\ 2A + 2D = 0 \\ -4A = 4 \\ 2C - 2B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

Do đó: $u(x) = -x^2 \cos x + x \sin x$

Vậy, nghiệm tổng quát của (1) là

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x) + u(x) \\ &= C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + (-x^2 \cos x + x \sin x) \end{aligned}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giải các phương trình vi phân sau đây

a. $y'' - 3y' - 4y = 0$

b. $2y'' - 5y' + 2y = 0$

c. $25y'' - y = 0$

d. $y'' + 25y' = 0$

e. $y'' + 25y' + 125y = 0$

f. $y'' - 6y' + 9y = 0$

g. $y'' + 6y' + 9y = 0$

h. $y'' + 25 = 0$

i. $y'' + 4y' + 8y = 0$

j. $y'' + 6y' + 12y = 0$

k. $2y'' + 2y' + 9y = 0$

2. Giải các phương trình vi phân sau đây

a. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$

b. $y'' - y = 3e^x$

c. $y'' - 2y' - 3y = -2xe^{-x}$

d. $y'' + y' - 2y = xe^x$

e. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$

f. $y'' - 2y' + 2y = x^2$

g. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$

h. $y'' - 4y' = \sin x$

i. $y'' + y = 3\sin x$

j. $y'' - y = 1 - 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

k. $y'' - 2y = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

3. Giải các phương trình vi phân sau đây

a. $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2x$

b. $y'' + 2y' = 3x - e^{2x}$

c. $y'' + 3y' + 2y = 4 + 2x + e^{-x}$

d. $y'' + y' - 2y = x^2 + 3e^{-x}$

e. $y'' - y' - 2y = x^2 + e^{-x}$

f. $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

4. Giải các phương trình vi phân sau đây

a. $y'' - y = 2\cos^2 x$

b. $y'' - y = -2\sin^2 x$

c. $y'' - 4y' + 8y = 2\sin^2 x$

d. $y'' - 4y' + 8y = -2\cos^2 x$

e. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x} + \cos x$

f. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

5. Xét phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$. Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây

a. $u(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$

b. $u(x) = e^{2x}x(ax^2 + bx + c)$

c. $u(x) = e^{2x}x^2(ax^2 + bx + c)$

d. $u(x) = e^x x^2(ax + b)$

6. Xét phương trình vi phân $y'' + y' - 2y = e^x(2x + 1)$ (1). Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây

a. $u(x) = e^x(ax + b)$

b. $u(x) = e^x(ax^2 + bx)$

c. $u(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$

d. $u(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$

7. Xét phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$ (1). Khi đó, một nghiệm riêng của (1) có dạng nào sau đây

a. $u(x) = e^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$

b. $u(x) = axe^x \sin 2x$

c. $u(x) = e^x x(a \cos 2x + b \sin 2x)$

d. $u(x) = e^x (ax + b) \sin 2x$

8. Xét phương trình vi phân $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$ (1).
Nghiệm riêng của (1) có dạng

a. $u(x) = x[a \cos x + b \sin x]$

b. $u(x) = xe^{2x} [a \cos x + b \sin x]$

c. $u(x) = e^{2x} [(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$

d. $u(x) = x[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$

Chương VIII

ỨNG DỤNG CỦA GIẢI TÍCH TRONG KINH TẾ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các khái niệm cơ bản:

a - Đại lượng biên (biên tế): Trong kinh tế, khái niệm biên tế dùng để chỉ sự thay đổi của một biến kinh tế nào đó gây ra bởi sự thay đổi của một biến kinh tế khác. Cho $y = f(x)$ và f là hàm khả vi, ta có biên tế của y tại x là $My(x) = f'(x)$

Ví dụ: Gọi x là lượng sản phẩm của một xí nghiệp, y là tổng chi phí sản xuất. Giả sử y phụ thuộc vào x như sau:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ là hệ số hằng})$$

Khi đó, ta có chi phí biên tế của xí nghiệp là:

$$MC = f'(x) = 2ax + b$$

Chú ý: Khi $y = f(x) = ax + b$ thì $My(x) = a$. Như vậy, trong trường hợp hàm số là bậc nhất, thì giá trị biên tế chính là độ thay đổi của hàm số khi biến số tăng thêm 1 đơn vị.

Ví dụ: Hàm chi phí là $C(q) = q^3 - 10q^2 + 100q + 100$, với q là mức sản lượng. Thì chi phí biên là

$$MC(q) = 3q^2 - 20q + 100$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

Khi đó $MC(10) = 110$, có nghĩa là chi phí tăng xấp xỉ 110 đơn vị khi mức sản lượng từ 10 đơn vị tăng thêm 1 đơn vị.

Ví dụ: Giả sử tổng chi phí của một nhà máy tính theo công thức

$$C(L, K) = wL + rK$$

trong đó L là lượng lao động, w là tiền lương cho mỗi lao động, K là tiền vốn, r là lãi suất vay phải trả của vốn.

Ta có chi phí biên tế theo lao động là: $M_L C = w$. Đây là chi phí tăng thêm khi ta thêm một lao động.

Ta có chi phí biên tế theo lãi suất vay là: $M_K C = r$. Đây là chi phí tăng thêm khi ta thêm một đơn vị của lãi suất vay.

b - Độ co giãn: Trong nhiều ứng dụng kinh tế, tốc độ thay đổi của một hàm số thường phụ thuộc vào đơn vị tính của biến độc lập x và biến phụ thuộc y . Để tránh điều này, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm độ co giãn. Độ co giãn (còn gọi là hệ số co giãn) của biến y theo biến x là đại lượng đặc trưng cho tốc độ thay đổi *tương đối* của y theo x , được định nghĩa như sau:

$$\varepsilon_{yx}(x) = \frac{dy / y}{dx / x} = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = y'(x) \times \frac{x}{y}$$

Ví dụ:

(a.) Tìm độ co giãn của y theo x , nếu $y = e^x$

$$\text{Độ co giãn là: } \varepsilon(x) = y'(x) \cdot \frac{x}{y} = e^x \cdot \frac{x}{y}$$

✓ Khi $x = 100$ thì $y = e^{100}$

✓ Khi $x = 101$ thì $y = e^{101}$

$$\text{Ta có: } \frac{dy}{y}(100) = \frac{(e^{101} - e^{100})}{e^{100}} = e - 1 \approx 1,7 = 170\%$$

$$\text{Mặt khác: } \varepsilon(100) = e^{100} \cdot \frac{100}{e^{100}} = 100 \neq \frac{dy}{y}(100) \%$$

b) Tìm độ co giãn của y theo x , nếu $y = 3x + 5$

$$\text{Độ co giãn là: } \varepsilon = y'(x) \cdot \frac{x}{y} = \frac{3x}{3x+5}$$

$$\checkmark \text{ Khi } x = 100 \text{ thì } y = 305$$

$$\checkmark \text{ Khi } x = 101 \text{ thì } y = 308$$

$$\text{Ta có: } \frac{dy}{y} = \frac{308 - 305}{305} = \frac{3}{305} = \frac{300}{305} \%$$

$$\text{Mặt khác: } \varepsilon_y(100) = \frac{3 \times 100}{(3 \times 100 + 5)} = \frac{300}{305} \% = \frac{dy}{y} (\%)$$

Chú ý: Khi $y = f(x) = ax + b$ thì độ co giãn của y theo x chính là sự thay đổi của y tính theo phần trăm khi x tăng thêm 1%.
Ví dụ: Giả sử tổng chi phí của một nhà máy tính theo công thức

$$C(L, K) = wL + rK$$

trong đó L là lượng lao động, w là tiền lương cho mỗi lao động, K là tiền vốn, r là lãi suất vay phải trả của vốn.

Ta có chi phí biên theo L là $M_L C(L, K) = w$

Nên độ co giãn của $C(L, K)$ theo L là

$$\varepsilon_L C(L, K) = M_L C(L, K) \times \frac{L}{C(L, K)} = \frac{wL}{wL + rK}$$

B. BÀI TẬP

Bài 1: Giả sử hàm lợi nhuận của một xí nghiệp đối với một loại sản phẩm có dạng:

$$\pi = R - C - T = PQ - cQ - tQ - f$$

trong đó π là lợi nhuận, R là doanh thu, C là chi phí gồm định phí f (độc lập với sản lượng) và biến phí cQ (c : biến phí đơn vị trên một đơn vị sản phẩm, Q : sản lượng), t là thuế trên một đơn vị sản phẩm, T là tổng thuế. Giả sử: $P = a - bQ$ ($a, b > 0$).

$$\text{Khi đó, ta có: } \pi = aQ - bQ^2 - (c + t)Q - f$$

Để đơn giản, ta giả sử: $a = 10$, $b = 1$, $c = 2$, $f = 1$, thì

$$\pi = 10Q - Q^2 - (2 + t)Q - 1$$

Bài toán đặt ra là xí nghiệp muốn xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại. Đồng thời nhà nước cũng muốn xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để tổng thuế T đạt cực đại.

Giải:

Trước tiên, ta đứng trên cương vị của xí nghiệp, xem t như là tham số thì π là hàm số thực theo một biến số thực Q .

Điều kiện cấp 1:

$$\pi' = -2Q + 8 - t = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{8-t}{2} \quad (0 < t < 8)$$

Điều kiện cấp 2: $\pi'' = -2 < 0 \quad \forall Q > 0$

Vậy hàm π lõm ngặt toàn cục nên đạt cực đại toàn cục khi:

$$Q = Q^* = \frac{8-t}{2} \quad (0 < t < 8)$$

Với $Q = Q^*$, ta có: $T(t) = tQ^* = \frac{8t-t^2}{2}$

Điều kiện cần: $T' = \frac{8-2t}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Điều kiện đủ: $T'' = -1 < 0 \quad \forall t > 0$

Vậy hàm T lõm ngặt toàn cục nên đạt cực đại toàn cục khi:

$$t = t^* = 4 \text{ (thỏa điều kiện } 0 < t < 8 \text{)}$$

Khi đó, ta có: $Q = Q^* = 2$

$$P = P^* = a - bQ^* = 10 - 2 = 8$$

và $\pi = \pi^* = 20 - 4 - 6.2 - 1 = 3$

Bài 2: Giả sử hàm lợi nhuận của một công ty đối với một loại sản phẩm là:

$$\pi = R - C = PQ - wL - rK$$

trong đó π là lợi nhuận, R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động, w là tiền lương của một lao động, K là tiền vốn, r là lãi suất của tiền vốn, P là đơn giá bán. Giả sử Q là hàm sản xuất Cobb–Douglas có dạng là

$$Q = L^{1/3}K^{1/3}$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

Giả sử $w=1$, $r=0,02$, $P=3$. Hãy tìm L và K để hàm π đạt cực đại toàn cục.

Giải:

Ta có: $\pi = 3L^{1/3}K^{1/3} - L - 0,02K$

Các đạo hàm riêng của π là

$$\pi'_L = L^{-2/3}K^{1/3} - 1$$

$$\pi'_K = L^{1/3}K^{-2/3} - 0,02$$

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} \pi'_L = 0 \\ \pi'_K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L^{-2/3}K^{1/3} - 1 = 0 \\ L^{1/3}K^{-2/3} - 0,02 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{L^2} = 1 \\ \frac{L}{K^2} = (0,02)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K = L^2 \\ L = (0,02)^3 K^2 = (0,02)^3 L^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = 50 > 0 \\ K = 2500 > 0 \end{cases}$$

Điểm dừng là: $M(50, 25000)$

Xét điều kiện đủ.

Ta có ma trận Hesse:

$$H = \begin{pmatrix} \pi''_{LL} & \pi''_{LK} \\ \pi''_{KL} & \pi''_{KK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}L^{-5/3}K^{1/3} & \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{-2/3} \\ \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{-2/3} & -\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-5/3} \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$H_1 = -\frac{2}{3}L^{-5/3}K^{1/3} < 0 \quad \forall L > 0, K > 0$$

$$H_2 = \frac{4}{9}L^{-4/3}K^{-4/3} - \frac{1}{9}L^{-4/3}K^{-4/3} = \frac{1}{3}L^{-4/3}K^{-4/3} > 0$$

$$\forall L > 0, K > 0$$

Suy ra hàm π lõm ngặt toàn cục.

Do đó, π đạt cực đại toàn cục tại ($K = 2500$ và $L = 50$)

Bài 3: Giả sử một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm và bán tại hai thị trường tách biệt. Giả sử đơn giá bán tại thị trường 1 là P_1 cao hơn đơn giá bán tại thị trường 2 là P_2 . Giả sử tổng chi phí là:

$$C(Q_1, Q_2) = (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 3) + tQ_2$$

trong đó Q_1 , Q_2 lần lượt là lượng hàng bán được ở thị trường 1 và thị trường 2, t là chi phí tăng thêm trên một đơn vị sản phẩm ở thị trường 2. Tìm Q_1 và Q_2 để xí nghiệp có lợi nhuận tốt nhất. Biết rằng $P_1 = 7$, $P_2 = 6$, $t = 1$.

Giải:

Ta có hàm lợi nhuận: $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - [C(Q_1, Q_2) + tQ_2]$

Thì: $\pi = -Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 + 7Q_1 + 5Q_2 - 3$

Các đạo hàm riêng của hàm π :

$$\pi'_{Q_1} = -2Q_1 - Q_2 + 7 \text{ và } \pi'_{Q_2} = -Q_1 - 2Q_2 + 5$$

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2Q_1 - Q_2 + 7 = 0 \\ -Q_1 - 2Q_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2Q_1 + Q_2 = 7 \\ Q_1 + 2Q_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 3 \\ Q_2 = 1 \end{cases}$$

Xét điều kiện đủ.

$$\text{Ma trận Hess: } H = \begin{pmatrix} \pi''_{Q_1Q_1} & \pi''_{Q_1Q_2} \\ \pi''_{Q_2Q_1} & \pi''_{Q_2Q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$H_1 = -2 < 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

$$H_2 = |H| = 3 > 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

Vậy, π lõm ngặt toàn cục.

Do đó, π đạt cực đại toàn cục khi ($Q_1 = Q_1^* = 3$ và $Q_2 = Q_2^* = 1$)

Khi đó: $\pi = \pi^* = -9 - 1 - 3 + 21 + 5 - 3 = 10$

Bài 4: Một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường riêng biệt. Giả sử các hàm cầu trên 2 thị trường 1 và thị trường 2 lần lượt là

$$Q_{D_1} = 80 - \frac{P_1}{3}, \quad Q_{D_2} = 80 - \frac{P_2}{4}$$

và hàm tổng chi phí là $C(Q) = Q^2 + 30Q + 10$, trong đó P_i là đơn giá trên thị trường thứ i ($i = 1, 2$) và Q là tổng sản lượng. Tìm khối lượng sản phẩm công ty cung cấp cho các thị trường để lợi nhuận cao nhất.

Giải:

Gọi lượng sản phẩm của công ty cung cấp cho thị trường i là Q_i ($i = 1, 2$). Ta có:

$$\begin{cases} Q_1 = 80 - \frac{P_1}{3} \\ Q_2 = 80 - \frac{P_2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 240 - 3Q_1 \\ P_2 = 320 - 4Q_2 \end{cases}$$

Khi đó, hàm lợi nhuận là

$$\pi = (P_1 Q_1 + P_2 Q_2) - C(Q)$$

nghĩa là

$$\pi = (240 - 3Q_1)Q_1 + (320 - 4Q_2)Q_2$$

$$-(Q_1 + Q_2)^2 - 30(Q_1 + Q_2) - 10$$

Các đạo hàm riêng của hàm π :

$$\pi'_{Q_1} = 240 - 6Q_1 - [20(Q_1 + Q_2) + 30]$$

$$\pi'_{Q_2} = 320 - 8Q_1 - [20(Q_1 + Q_2) + 30]$$

Xét điều kiện cần.

Hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 240 - 6Q_1 = 30 + 2(Q_1 + Q_2) \\ 320 - 8Q_1 = 30 + 2(Q_1 + Q_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4Q_1 + Q_2 = 105 \\ Q_1 + 5Q_2 = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 20 \\ Q_2 = 25 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét điều kiện đủ.

Ma trận Hess là

$$H = \begin{pmatrix} \pi''_{Q_1 Q_1} & \pi''_{Q_1 Q_2} \\ \pi''_{Q_2 Q_1} & \pi''_{Q_2 Q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$H_1 = -8 < 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

$$H_2 = \det(H) = 76 > 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

$\Rightarrow$ hàm π lõm ngặt toàn cục

$\Rightarrow$ hàm π đạt cực đại toàn cục tại $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = (20, 25)$

Vậy công ty cung cấp cho:

- Thị trường thứ 1 là $Q_1 = 20$ đơn vị hàng với đơn giá là $P_1 = 240 - 3Q_1 = 180$
- Thị trường thứ 2 là $Q_2 = 25$ với đơn giá $P_2 = 324 - 4Q_1 = 220$

Bài 5 (*bài toán người tiêu dùng*): Giả sử hàm lợi ích đối với hai sản phẩm là:

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

trong đó x là lượng hàng thứ nhất, y là lượng hàng thứ hai. Giả sử người tiêu dùng có thu nhập I phải dùng hết để mua hai loại sản phẩm trên, P_x và P_y lần lượt là đơn giá của hai mặt hàng. Bài toán đặt ra là cần tìm x và y để cực đại hóa $U(x, y)$.

Giải:

Điều kiện ràng buộc của bài toán:

$$P_x x + P_y y = I \text{ với } (I \geq 2P_x, I \geq 2P_y)$$

Hàm Lagrange của bài toán:

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y + \lambda(I - P_x x - P_y y)$$

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - \lambda P_x = 0 \\ \frac{1}{y} - \lambda P_y = 0 \\ I - P_x x - P_y y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x^* = \frac{I}{2P_x} > 0 \\ y = y^* = \frac{I}{2P_y} > 0 \\ \lambda = \lambda^* = \frac{2}{I} \end{cases}$$

Điểm dừng là $M\left(\frac{I}{2P_x}, \frac{I}{2P_y}, \frac{2}{I}\right)$

Điều kiện đủ.

Ma trận Hess biên:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 & -P_x \\ 0 & -1/y^2 & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\bar{H}_1 = \begin{vmatrix} -1/x^2 & -P_x \\ -P_x & 0 \end{vmatrix} = -P_x^2 < 0 \quad \forall x > 0, y > 0, \lambda > 0$$

$$\overline{H}_2 = \left| \overline{H} \right| = \frac{P_x^2}{y^2} + \frac{P_y^2}{x^2} > 0 \quad \forall x > 0, y > 0, \lambda > 0$$

Vậy hàm $U(x, y)$ đạt cực đại toàn cục với ràng buộc $P_x x + P_y y = I$ tại

$$\begin{cases} x = \frac{I}{2P_x} \\ y = \frac{I}{2P_y} \end{cases}$$

Bài 6: Giả sử hàm lợi ích phụ thuộc vào số tiền tiêu dùng tại cuối hai thời kỳ 1 và 2 là C_1 và C_2 như sau

$$U(C_1, C_2) = C_1 C_2$$

Giả sử lãi suất tại cuối thời kỳ thứ 1 là $r = 5\%$, tổng thu nhập tại cuối thời kỳ thứ 1 là I . Giả sử ta có ràng buộc:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = I$$

trong đó $\frac{C_2}{1+r}$ là thời giá của C_2 tại cuối thời kỳ thứ 1.

Bài toán đặt ra là tìm C_1, C_2 để cực đại hóa hàm lợi ích $U(C_1, C_2)$.

Giải:

Điều kiện ràng buộc là $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = I$

Hàm Lagrange của bài toán:

$$L(C_1, C_2, \lambda) = C_1 C_2 + \lambda \left(I - C_1 - \frac{C_2}{1,05} \right)$$

Các đạo hàm riêng của hàm L :

$$L_{C_1} = C_2 - \lambda$$

$$L_{C_2} = C_1 - \frac{\lambda}{1,05}$$

$$L_{\lambda} = I - C_1 - \frac{C_2}{1,05}$$

Điều kiện cần.

$$\begin{cases} L'_{C_1} = 0 \\ L'_{C_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 - \lambda = 0 \\ C_1 - \frac{\lambda}{1,05} = 0 \\ I - C_1 - \frac{C_2}{1,05} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = C_2 \\ \lambda = 1,05 C_1 \\ 2C_1 = I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1^* = \frac{I}{2} > 0 \\ C_2^* = 1,05 \frac{I}{2} > 0 \\ \lambda^* = 1,05 \frac{I}{2} \end{cases}$$

Điểm dừng là $M\left(\frac{I}{2}; 1,05\frac{I}{2}; 1,05\frac{I}{2}\right)$

Điều kiện đủ.

$$\text{Ma trận Hess biên: } \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{1,05} \\ -1 & -\frac{1}{1,05} & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\bar{H}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \forall C_1 > 0, C_2 > 0, \lambda > 0$$

$$\bar{H}_2 = |\bar{H}| = \frac{2}{1,05} > 0 \quad \forall C_1 > 0, C_2 > 0, \lambda > 0$$

Vậy hàm $U(C_1, C_2)$ đạt cực đại toàn cục khi

$$\begin{cases} C_1 = C_1^* = \frac{I}{2} \\ C_2 = C_2^* = 1,05\frac{I}{2} \end{cases}$$

Bài 7 (cực tiểu hóa chi phí): Giả sử một xí nghiệp cần xác định lượng lao động L , lượng vốn K để cực tiểu hóa chi phí

$$C(L, K) = wL + rK$$

trong đó $w = 400$ là tiền lương cho mỗi lao động, $r = 0,01$ là lãi suất của vốn vay. Giả sử xí nghiệp phải sản xuất $Q_0 = 1000$ đơn vị sản phẩm và hàm sản phẩm là:

$$Q(L, K) = \sqrt{LK}$$

Giải:

Điều kiện ràng buộc là $Q_0 = L^{1/2}K^{1/2}$

Hàm Lagrange của bài toán:

$$F(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda(Q_0 - L^{1/2}K^{1/2})$$

Điều kiện cần.

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} F'_L = 0 \\ F'_K = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w - \frac{1}{2}\lambda L^{-1/2}K^{1/2} = 0 \\ r - \frac{1}{2}\lambda L^{1/2}K^{-1/2} = 0 \\ Q_0 - L^{1/2}K^{1/2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{(800)^2}{\lambda^2} \\ \frac{L}{K} = \frac{(0,02)^2}{\lambda^2} \\ LK = 10^6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = 5 > 0 \\ K = 200000 > 0 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Điểm dừng là $M(5, 200000, 4)$

Điều kiện đủ.

Ma trận Hess biên:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\lambda L^{-3/2}K^{1/2} & -\frac{1}{4}\lambda L^{-1/2}K^{-1/2} & -\frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/2} \\ -\frac{1}{4}\lambda L^{-1/2}K^{-1/2} & \frac{1}{4}\lambda L^{1/2}K^{-3/2} & -\frac{1}{2}L^{1/2}K^{-1/2} \\ -\frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/2} & -\frac{1}{2}L^{1/2}K^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\bar{H}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\lambda L^{-3/2}K^{1/2} & -\frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/2} \\ -\frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}L^{-1}K$$

$$\bar{H}_2 = |\bar{H}| = -\frac{1}{4}\lambda L^{-1/2}K^{-1/2}$$

Vì $\bar{H}_1 < 0$ và $\bar{H}_2 < 0$ với $\forall L, K, \lambda > 0$ nên hàm chi phí

$C(L, K)$ đạt cực tiểu toàn cục khi: $\begin{cases} L = L^* = 5 \\ K = K^* = 200\,000 \end{cases}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Hàm chi phí $C(q) = 3q^2 + 75q - 36q \ln q + 135$ với q là mức sản lượng.

a. Tính chi phí biên.

b. Tìm q để chi phí trung bình $\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$ đạt giá trị nhỏ nhất

c. So sánh giá trị của chi phí biên và giá trị của chi phí trung bình khi $\bar{C}(q)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Giả sử hàm lợi nhuận của một xí nghiệp đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C - T = P \cdot Q - (cQ + tQ + f)$$

trong đó $P = 12 - 3Q$ là đơn giá bán, $c = 4$ là chi phí trên một đơn vị sản phẩm, $f = 1$ là định phí độc lập đối với sản lượng Q . Hãy tìm sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa và định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để thu được của xí nghiệp nhiều thuế nhất.

3. Giả sử hàm lợi nhuận của một xí nghiệp đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C - T = P \cdot Q - (cQ + tQ + f)$$

trong đó $P = 10 - Q$ là đơn giá bán, $c = 4$ là chi phí trên một đơn vị sản phẩm, $f = 1$ là định phí độc lập đối với sản lượng Q . Hãy tìm sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa và

định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để thu được của xí nghiệp nhiều thuế nhất.

4. Một hãng có hàm lợi nhuận là

$$\pi = P.Q(L) - C(L)$$

với P là đơn giá bán, $Q(L) = 100\sqrt{L}$ là hàm sản xuất và $C(L) = 2500L + 1000$ là hàm chi phí, và L là lượng lao động.

a. Khi $P = 200$, hãy tìm L để hãng này có lợi nhuận tối đa.

b. Khi L tăng thêm 1% thì mức sản lượng của hãng tăng (hay giảm) bao nhiêu phần trăm?

5. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm với mức sản lượng là Q . Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp này là

$$\pi = P(Q).Q - C(Q)$$

trong đó $C(Q)$ là hàm tổng chi phí của doanh nghiệp. Gọi Q_0 , P_0 lần lượt là mức sản lượng và đơn giá bán khi doanh nghiệp có lợi nhuận lớn nhất. *Chỉ số Lerner* dùng để biểu thị quyền lực độc quyền của doanh nghiệp, ký hiệu là L và có công thức

$$L = \frac{P_0 - MC(Q_0)}{P_0} \in (0, 1)$$

a. Chứng minh rằng: $P_0 = MC(Q_0) \times \frac{\varepsilon_D}{1 + \varepsilon_D}$, trong đó

$\varepsilon_D = \varepsilon_D(P_0)$ là hệ số co giãn của cầu về giá tại P_0 .

b. Chứng minh rằng: $L = -\frac{1}{\varepsilon_D(P_0)}$

6. Một công ty sản xuất độc quyền. Cho biết hệ số co giãn cầu theo giá là -2 và chi phí biên của công ty là 20 (đơn vị tiền) trên mỗi đơn vị sản phẩm.

- Tìm mức đơn giá P để công ty này có lợi nhuận tối đa.
- Khi MC tăng 10% thì mức đơn giá sẽ tăng hay giảm bao nhiêu phần trăm?
- Hãy tính chỉ số Lerner của công ty này.

7. Một xí nghiệp trong thị trường cạnh tranh hoàn hảo có hàm tổng chi phí là

$$TC(Q) = VC(Q) + FC(Q)$$

với Q là mức sản lượng của xí nghiệp này, trong đó $VC(Q) = Q^2 + 180Q$ là chi phí biến đổi (còn gọi là *biến phí*) và $FC(Q) = 140000$ là chi phí cố định.

- Khi $P = 1200$, hãy tìm mức sản lượng Q để xí nghiệp này có lợi nhuận tối đa.
- Mức *giá hòa vốn* được định nghĩa là mức đơn giá bán bằng *tổng chi phí trung bình* thấp nhất. Hãy tìm mức giá hòa vốn của xí nghiệp này.
- Mức *giá đóng cửa* được định nghĩa là mức đơn giá bán bằng *biến phí trung bình* thấp nhất. Hãy tìm mức giá đóng cửa của xí nghiệp này.

8. Hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C = P \cdot Q - (wL + rK)$$

trong đó R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động,

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

$w=1$ là tiền lương của một lao động, K là tiền vốn, $r=0,03$ là lãi suất của tiền vốn, $P=9$ là đơn giá bán và Q là hàm sản xuất Cobb-Douglas: $Q=L^{1/3}K^{1/3}$. Hãy tìm L, K sao cho công ty đạt lợi nhuận tối đa.

9. Hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C = P \cdot Q - (wL + rK)$$

trong đó R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động, $w=2$ là tiền lương của một lao động, K là tiền vốn, $r=0,03$ là lãi suất của tiền vốn, $P=10$ là đơn giá bán và Q là hàm sản xuất Cobb-Douglas : $Q=L^{1/3}K^{1/3}$. Hãy tìm L, K sao cho công ty đạt lợi nhuận tối đa.

10. Cho hàm lợi nhuận π phụ thuộc theo đơn giá P , sản lượng $Q=L^{1/3}K^{1/3}$, lượng lao động L , lương trên mỗi lao động w , lượng vốn K , lãi suất của vốn vay r như sau

$$\pi = PQ - wL - rK$$

Với $w=2, r=0,02, P=6$. Tìm L và K để π đạt max.

11. Giả sử một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường tách biệt. Giả sử đơn giá bán tại thị trường thứ nhất là $P_1=5$, đơn giá bán tại thị trường thứ 2 là $P_2=4$. Hàm tổng chi phí của xí nghiệp là:

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + t \cdot Q_2$$

với Q_1, Q_2 lần lượt là lượng hàng bán được ở thị trường 1 và thị trường 2 và $t=1$ là chi phí tăng thêm trên một đơn vị sản

phẩm ở thị trường 2. Hãy tìm lượng hàng phân phối trên từng thị trường sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

12. Giả sử một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường tách biệt. Giả sử đơn giá bán tại thị trường thứ nhất là $P_1 = 8$, đơn giá bán tại thị trường thứ 2 là $P_2 = 7$. Hàm tổng chi phí của xí nghiệp là:

$$C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + t.Q_2 + 2$$

với Q_1, Q_2 lần lượt là lượng hàng bán được ở thị trường 1 và thị trường 2 và $t = 1$ là chi phí tăng thêm trên một đơn vị sản phẩm ở thị trường 2. Hãy tìm lượng hàng phân phối trên từng thị trường sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

13. Giả sử hàm lợi ích đối với hai sản phẩm là:

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

trong đó x là lượng hàng thứ nhất, y là lượng hàng thứ hai. Giả sử người tiêu dùng có thu nhập 10 phải dùng hết để mua hai sản phẩm trên, $P_1 = 3$ và $P_2 = 2$ lần lượt là đơn giá của hai mặt hàng thứ nhất và thứ hai. Tìm x và y để cực đại hóa $U(x, y)$.

14. Giả sử hàm lợi ích đối với hai sản phẩm là:

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

trong đó x là lượng hàng thứ nhất, y là lượng hàng thứ hai. Giả sử người tiêu dùng có thu nhập 12 phải dùng hết để mua hai sản phẩm trên, $P_1 = 5$ và $P_2 = 4$ lần lượt là đơn giá của hai mặt hàng hàng thứ nhất và thứ hai. Tìm x và y để cực đại hóa $U(x, y)$.

15. Giả sử hàm lợi ích phụ thuộc vào số tiền tiêu dùng trong hai thời kỳ 1 và thời kỳ 2 lần lượt là C_1 và C_2 như sau:

$$U(C_1, C_2) = C_1 C_2$$

Giả sử lãi suất sau thời kỳ thứ 1 là $r = 4\%$, tổng thu nhập trong thời kỳ thứ 1 là 10. Giả sử ta có ràng buộc $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = 10$ ($\frac{C_2}{1+r}$ là thời giá của C_2 ở thời kỳ thứ 1). Hãy tìm C_1, C_2 để cực đại hóa hàm lợi ích $U(C_1, C_2)$.

16. Một công ty có ngân sách quảng cáo hàng tháng là 24000 (USD). Bộ phận tiếp thị ước tính rằng nếu x (USD) được chi tiêu mỗi tháng cho quảng cáo trên báo và y (USD) được chi tiêu mỗi tháng cho quảng cáo trên truyền hình thì doanh thu của công ty là $R(x, y) = 40x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$. Cho biết lợi nhuận của công ty là

$$\pi(x, y) = 20\%R(x, y) - C(x, y)$$

với là $C(x, y)$ chi phí quảng cáo. Bằng phương pháp nhân tử Lagrange, hãy tìm x và y để công ty có lợi nhuận tốt nhất.

17. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm nhưng tiêu thụ trên hai thị trường tách biệt. Biết hàm cầu của loại sản phẩm trên từng thị trường lần lượt là

$$Q_{D_1} = 780 - 2P_1 \text{ và } Q_{D_2} = 480 - P_2$$

và hàm tổng chi phí $C = Q^2 + 20Q + 10$ trong đó Q_i ($i = 1, 2$) là lượng hàng của xí nghiệp phân phối cho thị trường thứ i . Tìm mức sản lượng và lượng hàng phân phối trên từng thị trường của loại sản phẩm trên để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

18. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường tách biệt. Biết hàm cầu trên từng thị trường là

$$Q_{D_1} = 310 - P_1 ; Q_{D_2} = 235 - \frac{1}{2}P_2$$

và hàm tổng chi phí là $C(Q) = Q^2 + 30Q + 20$ với $Q = Q_1 + Q_2$ trong đó Q_i ($i = 1, 2$) là lượng hàng của xí nghiệp phân phối cho thị trường thứ i .

- Tìm mức sản lượng và lượng hàng phân phối cho từng thị trường để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.
- Tìm mức sản lượng và lượng hàng phân phối cho từng thị trường để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa khi xí nghiệp sản xuất 80 đơn vị sản phẩm.

19. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu hai loại sản phẩm trên là:

$$Q_{D_1} = 1800 - 2P_1 + P_2 ; Q_{D_2} = 2160 + P_1 - P_2$$

và hàm tổng chi phí là $C(Q_1, Q_2) = 720Q_1 + 1060Q_2 + 800$. Tìm mức sản lượng của từng loại sản phẩm để xí nghiệp này có lợi nhuận tối đa.

20. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm và tiêu thụ trên một thị trường. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên thị trường là

$$Q_{D_1} = 800 - 2P_1 + P_2 ; Q_{D_2} = 960 + P_1 - P_2$$

Bài tập Toán Cao cấp dành cho khối ngành Thương Mại, Kinh tế

và hàm tổng chi phí là $C(Q_1, Q_2) = 320Q_1 + 250Q_2 + 300$ trong đó P_i, Q_i ($i=1, 2$) lần lượt là đơn giá và mức sản lượng của mặt hàng thứ i .

- Tìm mức sản lượng của mỗi loại sản phẩm để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.
- Tìm mức sản lượng của mỗi loại sản phẩm để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa với điều kiện hạn chế về chi phí là $C = 166700$

21. Giả sử hàm chi phí của một xí nghiệp là

$$C(L, K) = wL + rK$$

trong $w = 800$ là tiền lương cho mỗi lao động, $r = 0,02$ là lãi suất của vốn vay. Giả sử một xí nghiệp cần xác định lượng lao động L , lượng vốn K để cực tiểu hóa chi phí. Nếu xí nghiệp phải sản xuất $Q_0 = 1000$ đơn vị sản phẩm và hàm sản phẩm là

$$Q = L^{1/2}K^{1/2}$$

thì L, K bằng bao nhiêu?

22. Cho hàm chi phí $C(L, K) = wL + rK$ trong đó $w = 8$, $r = 0,02$. Hàm sản xuất là hàm Cobb – Douglas có dạng

$$Q(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$$

Tìm L và K để hàm $C(L, K)$ đạt cực tiểu toàn cục thỏa mãn điều kiện $Q = 100$.

23. Cho $Q = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$. Độ co giãn của Q theo L tại $L=8$ là kết quả nào sau đây

- a. $\frac{1}{3}K^{-\frac{1}{2}}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{3}K^{\frac{1}{2}}$ d. $\frac{1}{3}L^{\frac{1}{3}}$

24. Một xí nghiệp có hàm sản xuất Cobb - Douglas

$$Q(x, y) = 3x^{\alpha}y^{\beta} \text{ (với } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ và } \alpha + \beta = 1)$$

với $x > 0, y > 0$ lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất và thứ hai.

- Tính năng suất biên theo x của xí nghiệp, ký hiệu là $M_xQ(x, y)$.
- Tính năng suất biên theo x của xí nghiệp, ký hiệu là $M_xQ(x, y)$.
- Hãy so sánh kết quả của $x.M_xQ(x, y) + y.M_yQ(x, y)$ với $Q(x, y)$.

25. Một xí nghiệp có năng suất thỏa phương trình

$$Q(x, y) = 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$$

với $x > 0, y > 0$ lần lượt là lượng nguyên liệu thứ nhất và thứ hai. Khi x tăng 1% thì năng suất của xí nghiệp sẽ tăng bao nhiêu phần trăm?

26. Giả sử Q là hàm sản xuất Cobb – Douglas dạng

$$Q(L, K) = 4\sqrt{LK}$$

Khi đó, hệ số co giãn của Q theo K tại $L = 9$, $K = 4$ là kết quả nào sau đây

- a. 0,125 b. $\frac{1}{6}$ c. 3 d. 0,5

27. Cho hàm sản lượng Q của một xí nghiệp phụ thuộc vào lượng lao động L và lượng vốn K là

$$Q = L + \sqrt{LK}$$

Tại thời điểm $L = 100$ và $K = 25$, xí nghiệp giảm lượng lao động 1 đơn vị. Để sản lượng không thay đổi xí nghiệp cần tăng lượng vốn xấp xỉ là kết quả nào sau đây

- a. 1,00 b. 1,25 c. 1,50 d. 1,75

28. Một người tiêu dùng sử dụng hết số tiền là 220 (đơn vị tiền) để mua hai loại hàng. Biết hàm lợi ích của người này là

$$U = (x + 4)y$$

trong đó x, y tương ứng là lượng hàng thứ nhất và thứ hai được mua. Lợi ích đối với người tiêu dùng là lớn nhất khi lượng hàng thứ nhất và thứ hai được mua lần lượt là $x = 20$, $y = 15$. Khi đó đơn giá loại hàng thứ nhất và thứ hai tương ứng là

- a. $P_1 = 8$, $P_2 = 4$
b. $P_1 = 3$, $P_2 = 12$
c. $P_1 = 10$, $P_2 = 16$
d. $P_1 = 5$, $P_2 = 8$

29. Tiết kiệm S của một quốc gia có liên hệ với thu nhập I , bởi phương trình $S^2 + \frac{I^2}{4} = IS + 2I$. Giả sử thu nhập chỉ sử dụng cho hai mục đích là tiết kiệm và tiêu dùng.

a. Tìm *xu hướng tiết kiệm biên* khi $I = 16$ và $S = 12$.

b. Tìm *xu hướng tiêu dùng biên* khi $I = 16$ và $S = 12$.

Hướng dẫn:

(a.) Xu hướng tiêu dùng tiết kiệm biên là $MPS = \frac{dS}{dI}$ trong đó $S(I)$ là hàm tiêu dùng theo thu nhập I .

(a.) Xu hướng tiêu dùng tiêu dùng biên là $MPC = \frac{dC}{dI}$ trong đó $C(I)$ là hàm tiêu dùng theo thu nhập I . Ta luôn có

$$MPS + MPC = 1$$

30. Gọi x là tổng thu nhập quốc gia và $C = C(x)$ là hàm tiêu dùng, $S = S(x)$ là hàm tiết kiệm. Giả sử hàm xu hướng tiêu dùng biên thỏa mãn

$$MPC = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right] \text{ và } C(1) = 10$$

a. Hãy xác định biểu thức của hàm tiết kiệm $S(x)$.

b. Tính $MPS(100)$.

